



ЗАПИСКИ ГОРНАГО ИНСТИТУТА

Императрицы Екатерины II.

Томъ IV.

С.-Петербургъ, 1913.

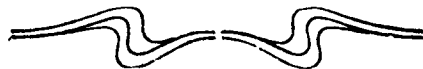
Выпускъ 3.

Содержаніе:

16. **В. В. Никитинъ.** Псевдохроизмъ въ двойниковыхъ пластинкахъ кальцита 155
17. **И. М. Бахуринъ.** О накопленіи погрѣшностей въ съемкѣ рудничныхъ полигоновъ. 172
18. **А. Н. Заварицкій.** Объ оптическомъ изслѣдованіи минераловъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ 192
19. **П. Я. Салдау.** О твердости и микроструктурѣ сплавовъ теллуристыхъ и сѣрнистыхъ соединений. 228

Браткія сообщенія:

- Х. П. П. фонъ-Веймаръ.** Контрактивная векторіальная энергія объема и поверхности и тепловое состояніе веществъ. 239
- ХІ. Е. С. Федоровъ.** Простой и быстрый способъ демонстрированія общаго закона кристаллизаціи. 241



ЗАПИСКИ

ГОРНАГО ИНСТИТУТА

Императрицы Екатерины II.

Томъ IV.

С.-Петербургъ, 1913.

Выпускъ 3.

Содержаніе:

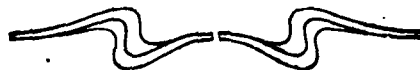
16. В. В. Никитинъ. Псевдохроизмъ въ двойниковыхъ пластинкахъ кальцита	155
17. И. М. Бахуринъ. О накопленіи погрѣшностей въ съемкѣ рудничныхъ полигоновъ.	172
18. А. Н. Заварицкій. Обь оптическомъ изслѣдованіи минераловъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ	192
19. П. Я. Салдау. Отвердости и микроструктурѣ сплавовъ теллуристыхъ и сѣрнистыхъ соединений.	228

Краткія сообщенія:

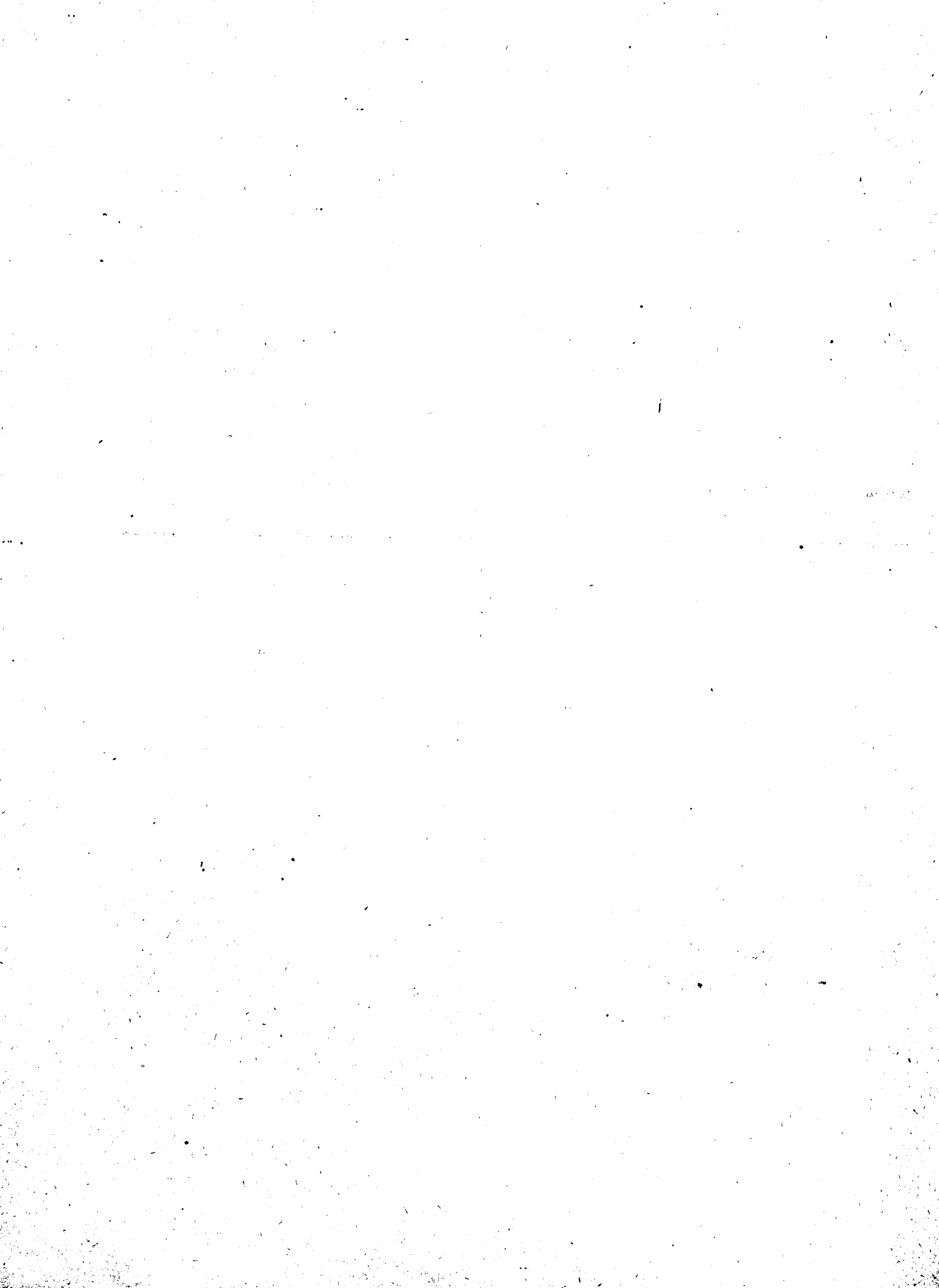
X. П. П. фонъ-Веймарнъ. Контрактивные векторіальныя энергіи объема и поверхности и тепловое состояніе веществъ.	239
XI. Е. С. Федоровъ. Простой и быстрый способъ демонстраціи общаго закона кристаллизаціи.	241

ГОС. ПУБЛИЧНАЯ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА СССР

6150 ⁵⁹/₅₉



4
—
13
4/3



16. Псевдохроизмъ въ двойниковыхъ пластинкахъ кальцита.

В. В. Никитинъ.

(Доложено 14 января 1913 г.).

Подъ именемъ псевдохроизма Е. С. Федоровымъ ¹⁾ было описано наблюдавшееся имъ подъ микроскопомъ для нѣкоторыхъ пластинчатыхъ веществъ явленіе окрашиванья, зависящее не отъ различія въ поглощеніи веществомъ различныхъ лучей видимой части спектра, но отъ особенностей его строенія.

Къ этому же разряду явленій относится и общеизвѣстное часто наблюдающееся явленіе окрашиванья двойниковыхъ пластинокъ, проростающихъ зерна кальцита по плоскостямъ перваго тупѣйшаго ромбоэдра ($10\bar{1}2$). Въ этомъ случаѣ явленіе псевдохроизма часто очень ярко и по этой причинѣ, а также и потому, что положеніе двойниковыхъ пластинокъ здѣсь легко опредѣляется, явленіе можетъ быть легче подвергнуто изслѣдованію, чѣмъ въ случаяхъ, описанныхъ Е. С. Федоровымъ.

Настоящая работа представляетъ попытку такого изслѣдованія. Мнѣ не удалось выяснитъ вопросъ вполне, но примѣненіе къ изслѣдованію „универсальнаго“ метода сильно исполняетъ картину явленія и позволяетъ отвѣтить на часть вызываемыхъ имъ вопросовъ. Поэтому я рѣшаюсь опубликовать полученные результаты не смотря на сознание неполноты освященія вопроса.

Прежде всего напомнимъ основныя черты изучаемаго явленія:

При разсматриваніи шлифа безъ анализатора бросаются въ глаза обыкновенно блѣдно, но явственно, а иногда и ярко окрашенныя полосы, прорѣзывающія зерна кальцита. Цвѣта довольно разнообразны: желто- и оранжево-бурый, фіолетово-бурый, фіолетовый, синій, голубой, зеленый, розовый. По впечат-

лѣнію на глазъ эти цвѣта отвѣчаютъ интерференционнымъ цвѣтамъ 1-го, 2-го и частью 3-го порядка, наблюдающимся при скрещенныхъ или при параллельныхъ николяхъ. Нерѣдко окраска различна для различныхъ участковъ одной и той же полосы, на примѣръ измѣняется отъ желто-бурой до зеленой черезъ фіолетовую и синюю.

Цвѣта не исчезаютъ и по удаленіи поляризатора, но становятся блѣднѣе: примѣсь бѣлаго цвѣта, довольно значительная и въ присутствіи поляризатора, становится еще значительнѣе. Не трудно убѣдиться, что окраска не связана съ частичной поляризацией свѣта при отраженіи отъ зеркала микроскопа, такъ какъ она не исчезаетъ и при ипользованіи свѣтомъ лампы непосредственно безъ помощи зеркала.

При введеніи поляризатора или анализатора окраска становится болѣе густой и наблюдается рѣзкое ея измѣненіе. Наиболѣе опредѣленные цвѣта и наибольшее различіе въ окраскѣ наблюдается болѣею частью при положеніяхъ, когда длина полосы параллельна или перпендикулярна къ плоскости колебаній частицъ эфира въ николѣ, но иногда наоборотъ это наблюдается при косомъ положеніи полосокъ.

Прибѣгая къ скрещеннымъ николямъ, не трудно убѣдиться, что моментамъ наибольшей густоты окраски отвѣчаютъ положенія иогасанія основного зерна кальцита, прорѣзаннаго двойниковыми полосками, и, слѣдовательно, положенія параллельности одной и, соответственно, перпендикулярности другой изъ осей симметріи изслѣдуемаго сѣченія оптического эллипсоида кальцита плоскости колебаній николя.

Въ одноосномъ минералѣ, каковымъ является кальцитъ, одной изъ осей симметріи каждаго сѣченія эллипсоида будетъ всегда ось Nm . Совмѣщая послѣднюю съ осью I столика и устанавливая ось

¹⁾ Ueber Pseudochroismus und Pseudodichroismus. Tschermak's mineralogische und petrographische Mittheilungen (neue Folge). 1895. XIV B. 569 S. Основанія Петрографіи 1897, стр. 83 и 84.

I сначала въ положеніе совпаденія, затѣмъ перпендикулярности къ плоскости колебаній николя ¹⁾ и наклоняя затѣмъ препаратъ около I, мы получимъ рядъ сѣченій кальцита съ постояннымъ положеніемъ осей ихъ, отвѣчающимъ наибольшей густотѣ и опредѣленности окраски. Попутно, наблюдая зерно при скрещенныхъ николяхъ, мы можемъ убѣдиться, что въ моменты затемнѣнія въ большинствѣ случаевъ гаснутъ и двойниковыя полосы и что, если темнота сохраняется при наклоненіяхъ около оси I, то полосы не появляются вновь и при наклонахъ. При параллельныхъ николяхъ при томъ же положеніи препарата полосы окрашены совершенно такъ же, какъ онѣ окрашены и въ присутствіи только одного изъ николей. При скрещенныхъ николяхъ, при вращеніи препарата или николей, вмѣстѣ съ освѣщеніемъ основного зерна появляется и окраска полосокъ, но она сильно затушена интерференціонной окраской основного зерна. Окраска эта не измѣняется при вращеніи препарата и характеризуется той меньшей опредѣленностью, которая отвѣчаетъ въ присутствіи только одного изъ николей косымъ по-

ложеніямъ оси Nm кальцита по отношенію къ плоскости колебаній николя.

Наклоненіе около оси I вызываетъ измѣненіе окраски. При совпаденіи плоскости пластинки съ оптической осью микроскопа окраски не наблюдается, а сами двойниковыя пластинки представляются настолько тонкими, что толщина ихъ измѣренію не поддается. Первые слѣды окраски наблюдаются при величинѣ угла между плоскостью пластинки и оптической осью микроскопа $\psi = 5^\circ$. Но это бываетъ очень рѣдко. Чаще всего окраску удается замѣтить только при $\psi = 15^\circ - 20^\circ$, но иногда особенно же, когда ось Nm перпендикулярна къ плоскости колебаній николя ¹⁾, окраска становится замѣтной только при $\psi = 25^\circ - 30^\circ$. Большею частью окраска появляется раньше при положеніи, когда ось Nm перпендикулярна къ плоскости колебаній николя, чѣмъ, когда она параллельна. Для иллюстраціи измѣненій окраски, наблюдающихся при наклоненіи препарата, мы приведемъ рядъ наблюденій надъ тремя полосками кальцита, № 1 въ одномъ препаратѣ, № 2 и № 3 въ другомъ. Результаты наблюденій сгруппированы въ таблицѣ I.

¹⁾ Этого можно удобно достигнуть вращеніемъ накладного анализатора, конечно удаливши предварительно поляризаторъ.

¹⁾ Все это относится къ случаю, когда наблюденіе происходитъ въ присутствіи только одного николя.

Таблица I.

№ 1.

При одномъ николѣ.		J = $40\frac{1}{2}^\circ$ $\psi = 0$												
Nm паралл. плоск. колебаній.		28 $\frac{1}{2}^\circ$	23°	17 $\frac{1}{2}^\circ$	15°	13°	10 $\frac{1}{2}^\circ$	7°	5°	1 $\frac{1}{2}^\circ$	2 $\frac{1}{2}^\circ$	6 $\frac{1}{2}^\circ$	12°	22°
Nm перпендик. плоск. колебаній.		12°	17°	22 $\frac{1}{2}^\circ$	25°	27°	30°	33 $\frac{1}{2}^\circ$	35°	40°	43°	47°	52 $\frac{1}{2}^\circ$	62 $\frac{1}{2}^\circ$
Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	Блѣдный красно-оранжевый.	Желтый.	Блѣдный зеленый.	Сѣров.-голубой.	Сѣров.-синій.		Фиолет.-сѣрый.	Грязный голубов.-сѣрый.	Фиолет.-сѣрый.	Оранже.-сѣрый.	Оранже.-желтый.	Блѣдный желтый.	Отсутствіе окраски.
Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	Красно-оранжев.	Желтый.	Зеленый.	Голубой.	Оиній.	Розовый.	Очень темный фиолетовый.	Черно-фиолет. Оранже.-бурый.	Оранжевый.	Оранже.-желтый.	Желтый.	Блѣдный желтоватый.	Едва замѣтный желтый.
Едва замѣтный сѣроватый.	Сѣрый.	Фиолет.-сѣрый.						Желт.-зеленый.	Зеленый голубой.	Синій.	Темный сѣров.-фиолетов.	Оранже.-бурый.	Блѣдный оранжевый.	Отсутствіе окраски.

№ 3.

При одномъ николѣ.		При отсутствіи николей.	$J = 38^{\circ}$	
№ параллел. плоск. колеб.	№ перпендик. плоск. колеб.		$\psi = 0^{\circ}$	
Слѣды неопред. окраски.	Красно-оранжев. и грязно-голубой.	Красно-оранжевый и грязно-голубой.	11 ⁰	27 ⁰
Блѣдный желто-оранжев.	Красно-оранжев. и грязно-фіолетов.	Желто-оранжев.	15 ⁰	23 ⁰
Оранжевый и грязно-фіолетов.	Темный желто-оранжев.	Желто-оранжев. и фіолетово-бурый.	20 ^{1/2} ⁰	17 ^{1/2} ⁰
Блѣдный фіолет., синій и зеленый.	Желто-оранжев.	Очень блѣдный оранжев., фіолет., голубой, зелено- вато-желтый.	24 ^{1/2} ⁰	13 ^{1/2} ⁰
Зеленов.-желтый, оранжевый и пурпуровый.	Блѣдный оранжево-желтый.	Зеленовато-желт. и оранжевый.	31 ^{1/2} ⁰	6 ^{1/2} ⁰
Оранжев.-бурый.	Едва замѣтный желтоватый.	Блѣдный желто-оранжев.	41 ⁰	3 ⁰
Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	51 ⁰	13 ⁰

При одномъ николѣ.		При отсутствіи николей.	$J = 24\frac{1}{2}^{\circ}$	
№ параллел. плоск. колебан.	№ перепендик. плоск. колебан.		$\psi = 0^{\circ}$	
Неопредѣленн. темно-бурый.	Желто-бурый.	Желто-бурый.	3 ⁰	21 ^{1/2} ⁰
Блѣдный сѣрый.	Желто-оранжев.	Блѣдный желто-оранжев.	10 ⁰	14 ^{1/2} ⁰
Почти безцвѣтный.	Желто-оранжев.	Блѣдный желто-оранжев.	14 ⁰	10 ^{1/2} ⁰
Желто-оранжев.	Желто-оранжев.	Желто-оранжев.	19 ⁰	5 ^{1/2} ⁰
Буро-фіолетов.	Блѣдный желто-оранжев.	Блѣдный оранж.-бурый.	23 ⁰	1 ^{1/2} ⁰
Яркій зеленый, синій, фіолетовый и бурый.	Блѣдный желто-оранжев.	Блѣдные бурый, фіолетовый и голубой.	27 ^{1/2} ⁰	3 ⁰
Грязно-бурый.	Отсутствіе окраски.	Едва замѣтный бурый.	33 ^{1/2} ⁰	9 ⁰
Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	Отсутствіе окраски.	49 ^{1/2} ⁰	25 ⁰
Неопредѣленн. буровато-сѣрый.	Грязный желто-бурый.	Грязный желто-бурый.	10 ^{1/2} ⁰	35 ⁰
Почти безцвѣтный.	Желто-оранжев.	Блѣдный, грязн. желто-оранж.	17 ⁰	41 ^{1/2} ⁰
Блѣдный желто-оранжев.	Желто-оранжев.	Желто-оранжев.	24 ^{1/2} ⁰	49 ⁰
Яркіе зеленый, синій, фіолетовый и бурый.	Желто-оранжев.	Фіолетовый и оранжев.-бурый.	31 ^{1/2} ⁰	56 ⁰
Оранжев.-бурый.			41 ⁰	65 ^{1/2} ⁰

Наблюдения надъ первой пластинкой (№ 1) показываютъ очень большое сходство окраски пластинки въ присутствіи николей съ той, которая наблюдается при тѣхъ же углахъ ψ въ присутствіи одного николя, при перпендикулярности оси Nm къ плоскости колебаній николя. Расхожденія наблюдаются только, начиная съ $\psi = 35^\circ$. Для этого угла и для угловъ $\psi > 35^\circ$ окраска представляется средней между окраской при Nm параллельномъ и Nm перпендикулярномъ плоскости колебаній николя.

При Nm , перпендикулярномъ къ плоскости колебаній николя, порядокъ цвѣтовъ при возрастаніи угла ψ отвѣчаетъ порядку пониженія интерференціонныхъ цвѣтовъ, наблюдаемыхъ при скрещенныхъ или при параллельныхъ николяхъ, причемъ, если параллелизовать ихъ съ цвѣтами при параллельныхъ николяхъ, то красно-оранжевый и желтый цвѣта принадлежатъ къ цвѣтамъ 2-го порядка, остальные къ цвѣтамъ 1-го порядка. Но цвѣта не представляются вполне нормальными. Особенно отличается фіолетовый цвѣтъ. Онъ настолько теменъ, что фіолетовая окраска его только съ трудомъ различима.

При параллельности оси Nm плоскости колебаній николя окраска становится ощутимой значительно позже и сначала выражается сѣрыми неопредѣленными цвѣтами, затѣмъ она частью повторяетъ цвѣта при перпендикулярности оси Nm , отставая отъ послѣдней на разность въ углахъ ψ отъ 10° до 15° .

Для полоски № 2 окраска безъ николей такъ же, какъ и для № 1, отвѣчаетъ въ началѣ окраскѣ при Nm , перпендикулярномъ къ плоскости колебаній николя. При $\psi = 19^\circ$ она одинаково для всѣхъ трехъ случаевъ, и дальше цвѣта представляются также средними между цвѣтами при Nm перпендикулярномъ и Nm параллельномъ. Въ противоположность полоскѣ № 1 цвѣта при Nm перпендикулярномъ совершенно однообразны и несравненно однообразнѣе, чѣмъ при Nm параллельномъ плоскости колебаній. Точно такъ же въ противоположность № 1 порядокъ цвѣтовъ въ послѣднемъ случаѣ отвѣчаетъ не пониженію цвѣтовъ съ возрастаніемъ угла ψ , а повышенію ихъ. Небольшая величина угла наклона I при $\psi = 0^\circ$ позволяетъ для полоски № 2 наблюдать появленіе цвѣтовъ съ увеличеніемъ угла ψ не только при уменьшеніи угла наклона, но и при увеличеніи его. Сравнивая соответственныя колонны таблицы, отвѣчающія близкимъ величинамъ угловъ ψ , мы можемъ видѣть, что величина угла наклона I очень мало вліяетъ на цвѣтъ окраски и измѣняетъ скорѣе только его оттѣнокъ.

Обращаясь къ полоскѣ № 3, мы замѣтимъ то же согласіе окраски безъ николей съ окраской при Nm

перпендикулярномъ плоскости колебаній николя, но только при малой величинѣ угла ψ . Начиная съ $\psi = 17\frac{1}{2}^\circ$ цвѣта отвѣчаютъ уже среднимъ между цвѣтами при Nm перпендикулярномъ и Nm параллельномъ. Аналогично полоскѣ № 2 наблюдается повышение цвѣтовъ въ послѣднемъ случаѣ и аналогично № 1 пониженіе при Nm перпендикулярномъ. Цвѣта при Nm перпендикулярномъ нѣсколько менѣе насыщены, чѣмъ при Nm параллельномъ плоскости колебаній николя.

Представляетъ интересъ сдѣлать попытку опредѣлить разность хода, отвѣчающую интерференціонной окраскѣ полосъ. Это могло бы быть сдѣлано при помощи компенсатора. Появленіе интерференціонной окраски безъ николей свидѣтельствуетъ о томъ, что въ двойникѣ кальцита мы имѣемъ уже и поляризаціонную систему и анизотропную пластинку, но, очевидно, мы не можемъ ввести компенсаторъ внутрь ее. Сдѣлать попытку примѣненія компенсатора мы можемъ, только основываясь на томъ фактѣ, что въ присутствіи одного изъ николей интерференціонная окраска становится болѣе насыщенной и измѣняется въ зависимости отъ положенія осей сѣченія минерала относительно плоскости колебаній николя.

Зная это мы должны вводить компенсаторъ между изслѣдуемой пластинкой и анализаторомъ или между поляризаторомъ и изслѣдуемой пластинкой.

Наиболѣе насыщенные и опредѣленные цвѣта получаются, какъ мы видѣли при параллельности или перпендикулярности оси Nm изслѣдуемаго зерна кальцита къ плоскости колебаній николя. При этомъ положеніи минерала относительно николя, очевидно, мы и должны вводить компенсаторъ. Если мы будемъ вводить его параллельно или перпендикулярно оси Nm и соответственно плоскости колебаній николя, то не замѣтимъ никакихъ измѣненій въ окраскѣ полосъ, но при введеніи компенсатора подъ угломъ 45° къ этимъ направленіямъ будемъ наблюдать рядъ измѣненій цвѣта. При этомъ мы не увидимъ знакомой картины послѣдовательнаго пониженія цвѣтовъ, характеризующаго компенсацію. Иногда мы будемъ наблюдать только исчезновеніе цвѣтовъ безъ измѣненія ихъ оттѣнка и при томъ одновременное для всѣхъ участковъ пластинки, окрашенныхъ въ различные интерференціонные цвѣта; это совершенно противорѣчитъ условіямъ компенсаціи разности хода лучей, создающей интерференціонную окраску.

Знакомая ближе съ происходящими измѣненіями окраски, именно наблюдая ихъ при различномъ наклонѣ и, слѣдовательно, при различныхъ цвѣтахъ пластинки и сравнивая между собой измѣ-

ненія, наблюдаемая при Nm параллельномъ и Nm перпендикулярномъ къ плоскости колебаній николя, мы убѣдимся, что введеніе компенсатора каждый разъ непременно приводитъ къ окраскѣ, наблюдаемой безъ компенсатора при поворотѣ препарата или, что одно и то же, при поворотѣ николя, на 90° . Легко убѣдиться также въ томъ, что исчезновеніе окраски при введеніи компенсатора наблюдается только тогда, когда безъ компенсатора при поворотѣ на 90° не наблюдается окраска.

Поворотъ шлифа около оси J на 180° или одновременный поворотъ и препарата и николя около оси микроскопа на 90° никакихъ измѣненій въ наблюдаемую картину не вноситъ. Это явленіе также рѣзко противорѣчитъ условіямъ компенсаціи: при послѣдней мы всегда въ одномъ положеніи наблюдаемъ повышеніе цвѣтовъ въ другомъ пониженіе.

Такимъ образомъ, примѣняя компенсаторъ, мы можемъ подвергнуть измѣренію только разность хода, которую нужно придать или вычесть изъ наблюдаемой, чтобы получить окраску, отвѣчающую окраскѣ безъ компенсатора при перпендикулярномъ положеніи препарата. Можемъ вмѣсто того опредѣлить разность между показаніями компенсатора при приведеніи къ одному и тому же цвѣту, напр. къ чувствительному фіолетовому при Nm параллельномъ и Nm перпендикулярномъ къ плоскости колебаній николя. Эта разность должна отвѣчать величинѣ разности хода, показываемой компенсаторомъ при приведеніи къ окраскѣ наблюдаемой при перпендикулярномъ къ данному положенію оси Nm . Приведемъ нѣсколько примѣровъ такихъ измѣреній. (Табл. II). Наблюденія № 1 и № 2 произведены надъ одной и той же полоской, но при различныхъ углахъ ψ . Наблюденія № 3 и № 4 относятся къ другимъ зернамъ кальцита въ

Таблица II.

		Nm перпендикул. къ плоскости колебаній николя.	Nm параллельно къ плоскости колебаній николя.
№ 1.	Величина угла ψ	31°	31°
	Окраска	Блѣдн., оранж.-бурая.	Зелен., син., фіол. и оранж.
	Показан. компенсат. при:		
	окраскѣ перпенд. полож.	273 μ .	239 μ .
	2-мъ фіолетовомъ *)	819 »	502 »
№ 2.	Величина угла ψ	17°	17°
	Окраска	Рѣзк. желто-бурая	Едва замѣтн. оранж.
	Показ. компенс. при:		
	окраскѣ перпенд. полож.	260 μ .	218 μ .
	1-мъ фіолетовомъ	606 »	392 »
	2-мъ фіолетовомъ	1129 »	850 »

*) 1-й фіолетовый уже входитъ въ составъ окраски при Nm паралл. плоскости колеб.

		Nm перпендикулярно плоскости колебаній николя.		
		Nm перпендикулярно	Nm параллельно	
№ 3.	Величина угла ψ	39°	39°	
	Окраска	Свѣтло-бурая	Синяя, фіолет. и бурая	
	Показ. компенс. при: окраскѣ перпенд. полож.	260 μ .	282 μ .	
	2-мъ фіолетовомъ	850 »	524 »	
	3-мъ фіолетовомъ	1440 »	1076 »	
	№ 4.	Величина угла ψ	32°	32°
Окраска		Блѣдн. оранж.-бурая	Зелен., син. и фіолет.	
Показ. компенс. при: окраскѣ перпенд. полож.		326 μ .	304 μ .	
2-мъ фіолетовомъ		850 »	564 »	
№ 5.		Величина угла ψ	38 $\frac{1}{2}$ °	38 $\frac{1}{2}$ °
		Окраска	Желто-оранж.-бурая	Синяя
	Показ. компенс. при: окраскѣ перпенд. полож.	304 μ .	260 μ .	
	2-мъ фіолетовомъ	687 »	436 »	
	3-мъ фіолетовомъ	1232 »	893 »	

томъ же препаратѣ и, наконецъ наблюдение № 5 къ полоскѣ въ другомъ препаратѣ, изиѣненія окраски которой послужило намъ однимъ изъ примѣровъ, именно № 1, въ табл. I. Въ слѣдующей таблицѣ

(Табл. III) мы сопоставляемъ величины разности хода, полученныя какъ приведеніемъ къ цвѣту перпендикулярнаго положеніи оси Nm, такъ и приведеніемъ къ одному изъ фіолетовыхъ. Цифры таблицы

Т а б л и ц а III.

№№	Привед. къ окраск. перпенд. полож.			Приведеніе къ фіолет.				Среднее изъ всѣхъ набл.
	Nm. перпенд.	Nm. паралл.	Среднее.	№ 1.	№ 2.	№ 3.	Среднее.	
	μ .	μ .	μ .	μ .	μ .	μ .		μ .
1	273	239	256	—	317	—	—	276
2	260	218	239	214	279	—	246	243
3	260	282	271	—	326	367	346	309
4	326	304	315	—	286	—	—	305
5	304	260	282	—	251	339	295	288

обнаруживаютъ большія колебанія, что указываетъ на грубость наблюдений. Среднія изъ всѣхъ наблюдений довольно близки между собой: разность между максимальной и минимальной цифрами равна 66 микро-микронамъ. Наименьшая цифра 243 μ . принадлежитъ тому случаю (№ 2), гдѣ величина угла ψ наименьшая ($\psi = 17^\circ$) и окраска полосы наименьшая.

Но кромѣ того никакихъ другихъ правильныхъ соотношеній уловить не удастся. Если вычислить среднюю изъ всѣхъ 5 цифръ послѣдняго столбца таблицы, получимъ 284 μ . Эта цифра отвѣчаетъ половинѣ длины волны одного изъ среднихъ спектральныхъ цвѣтовъ, именно желтаго, довольно близкаго къ цвѣту спектра паровъ натрія ($\lambda = 589 \mu$). Такое совпаденіе даетъ поводъ поставить вопросъ не обуславливается ли различіе разности хода, наблюдаемое при достиженіи компенсаторомъ одной и той же интерференціонной окраски при Nm перпендикулярномъ и Nm параллельномъ плоскости колебаній анализатора, той же причиной, какъ при на-

блюденіи соответствующей окраски при скрещенныхъ и при параллельныхъ николяхъ, т. е. постоянной разностью фазъ, равной π ¹⁾ или иначе постоянно равной $\frac{\lambda}{2}$ независимо отъ соотношенія между коэффициентами преломленія изслѣдуемаго анизотропнаго вещества.

Для проверки этого предположенія опредѣляемъ при помощи того же компенсатора, съ которымъ производили изслѣдованье двойниковыхъ пластинокъ, разность хода, отвѣчающую чувствительному фіолетовому № 1, № 2 и № 3 ²⁾ при скрещенныхъ и при параллельныхъ николяхъ, вычитаемъ найденныя цифры одну изъ другой и сопоставляемъ полученныя разности съ средними арифметическими изъ цифръ 5-го, 6-го и 7-го столбцовъ таб. III. (См. таб. IV).

Полученныя цифры разностей довольно близки къ среднимъ для фіолетов. № 1, № 2 и № 3, ко-

1) См. стран. 75.

2) Правильнѣе пурпуровому или розовому.

Т а б л и ц а I V.

Фіолетовый.	Н и к о л и		Разность.	Средн. 5, 6 и 7 столб. табл. III.
	скрещены.	паралл.		
№ 1.	μ . 590	μ . 304	μ . 286	μ . 214
№ 2.	1180	872	308	292
№ 3.	1691	1396	295	353
Средн. арифм.			293	297 *)

*) Средн. арифм. изъ всѣхъ цифръ столб. 5, 6 и 7 табл. III.

нечно, если принимать во вниманіе трудность наблюденія измѣненія цвѣтовъ въ узкихъ двойниковыхъ полоскахъ и вслѣдствіе этого грубость наблюдений. Арифметическая средняя изъ всѣхъ трехъ наблюдений почти совпадаетъ съ арифметической средней величиной изъ всѣхъ наблюдений надъ приведеніемъ къ фіолетовому цвѣту, помѣщенныхъ въ таблицахъ III и II. Это обстоятельство даетъ намъ возможность съ довольно большою увѣренностью

считать дѣйствіе зерна кальцита, проросшаго двойниковой пластинкой, аналогичнымъ дѣйствію николя, въ которомъ плоскость колебаній совпадаетъ съ осью Nm cadaго даннаго сѣченія изслѣдуемаго зерна.

Если будемъ сравнивать показанія компенсатора, отвѣчающія какому либо изъ фіолетовыхъ цвѣтовъ, получающіяся при отсутствіи препарата, съ тѣми, которыя мы получили при изслѣдованіи различныхъ двойниковыхъ полосокъ (см. табл. II) то замѣ-

тимъ въ большинствѣ случаевъ значительныя различія. Соотношеніе цифръ табл. IV и II показываютъ, что случай, когда Nm перпендикулярно плоскости колебаній николя, слѣдуетъ параллелизовать съ скрещенными николями и, когда Nm параллельно плоскости колебаній съ случаемъ параллель-

ныхъ николей. При этомъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ показанія компенсатора при наблюденіи двойниковыхъ полосокъ будутъ выше, чѣмъ въ отсутствіи препарата, въ другихъ же случаяхъ наоборотъ ниже. Въ таб. V приведены разности между соответствующими цифрами табл. II и IV. Чертой сверху отмѣ-

Т а б л и ц а V.

№№ наблюд.	Фиолет. № 1.			Фиолет. № 2.			Фиолет. № 3.			Среднее.
	Nm I.	Nm II.	Средн.	Nm I.	Nm II.	Средн.	Nm I.	Nm II.	Средн.	
1	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ	μμ
2	16	88	52	361	370	365	251	320	285	312
3				330	348	339				319
4				330	308	319				473
5				493	436	465	459	503	481	

чены тѣ изъ нихъ, которыя оказались отрицательными. Цифры таблицы показываютъ, что разности, отвѣчающія для каждой полоски случаямъ, когда Nm изслѣдуемаго зерна кальцита перпендикулярно къ плоскости колебаній и параллельно этой плоскости, одинаковы въ предѣлахъ чувствительности наблюдений ¹⁾. Это показываетъ, что расхождение съ показаніями компенсатора, наблюдаемыми при отсутствіи препарата вызвано въ томъ и другомъ случаѣ нѣкоторой постоянной разностью хода одного и того же знака въ обоихъ случаяхъ.

Очевидно, эта разность хода обусловлена только что констатированной нами выше поляризацией свѣта въ системѣ двойника, играющей роль поляризатора, и присутствіемъ на пути поляризованнаго луча анизотропнаго вещества; при чемъ оси изслѣдуемаго сѣченія этого вещества не совпадаютъ съ плоскостями колебанія николя и съ осью Nm зерна кальцита.

Роль такого анизотропнаго вещества могутъ играть только вросшія въ главное зерно двойниковыя пластинки кальцита. Если это такъ, то окраска

¹⁾ Ошибку наблюденія здѣсь нельзя считать меньше 30—50 микро-микронъ.

двойниковыхъ полосокъ должна быть интерференціонной и должна соответствовать наблюдаемой нами разности между показаніями компенсатора при приведеніи къ одному изъ фиолетовыхъ цвѣтовъ въ присутствіи двойниковой полоски и въ отсутствіи препарата.

Обращаясь къ послѣднему столбцу таблицы V мы видимъ, что первой наблюдавшейся нами двойниковой полоскѣ соответствуетъ разность хода—365 μ. Этой разности ¹⁾ отвѣчаетъ при параллельныхъ николяхъ голубой и зеленовато-голубой цвѣтъ, а при скрещенныхъ николяхъ желтый переходный къ оранжево-желтому. Въ таб. II находимъ, что въ данномъ наблюденіи полоска была окрашена при параллельности оси Nm къ плоскости колебаній анализатора цвѣтами, измѣнявшимися въ различныхъ ея частяхъ отъ зеленого черезъ синій и фиолетовый до оранжеваго; при Nm перпендикулярномъ къ плоскости колебаній николя окраска полоски была блѣдно-оранжево-бурая. Такимъ образомъ это первое наблюденіе не противорѣчитъ нашему предположе-

¹⁾ См. напр. стр. 182 и 183 курса Z. Dupař et F. Peařce. Traité de technique minéralogique et pétrographique.

нiю. Положительный характеръ разности 365 μ .¹⁾ говоритъ о томъ, что оси изслѣдованнаго сѣченiя двойниковой пластинки имѣли расположенiе обратное осямъ компенсатора.

Обращаясь къ 2-му наблюдению, мы видимъ ничтожную разность хода, равную 8 μ . Вмѣстѣ съ тѣмъ окраска двойниковой пластинки была совершенно не насыщена, и не обладала опредѣленными цвѣтами. Разность хода при наблюдении 3-й и 4-й пластинки довольно хорошо согласуется съ окраской, наблюдавшейся при Nm параллельномъ плоскости колебанiй анализатора, аналогичной, какъ мы упомянули выше, наблюдению при параллельныхъ николяхъ. Только при 5-мъ наблюдении мы находимъ противорѣчiе, выражающееся въ томъ, что окраска здѣсь несмотря на болѣе высокую разность хода не только не выше, чѣмъ для предшествующаго 4-го, а даже ниже и ниже, чѣмъ она должна бы быть въ дѣйствительности²⁾. Для наблюдений 3-го, 4-го и 5-го, очевидно, расположенiе осей изслѣдованнаго сѣченiя двойниковыхъ полосокъ обратно наблюдению 1-му.

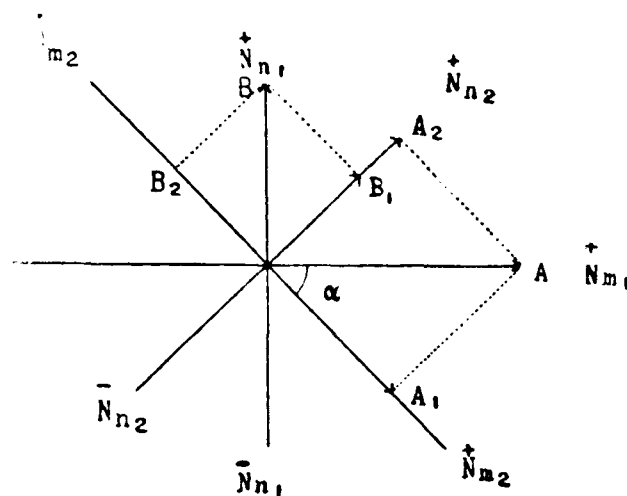
Изъ того, что намъ удалось выяснитъ до сихъ поръ, ясно, что показанiя компенсатора, полученные нами при приведенiи къ окраскѣ перпендикулярнаго положенiя (см. табл. II), должны отвѣчать также разности между показанiями компенсатора при скрещенныхъ и при параллельныхъ николяхъ и, дѣйствительно, сравнивая цифры 4-го столбца табл. IV съ соответственными цифрами табл. II мы найдемъ, что расхожденiе тѣхъ и другихъ не выходитъ за предѣлы малой точности нашихъ наблюдений.

Труднѣе поддается объясненiю особенность, указанная нами на стран. 159, именно отсутствiе какой либо разницы въ показанiяхъ компенсатора при введенiи его въ взаимно перпендикулярныхъ положенiяхъ, при одномъ и томъ же относительномъ положенiи плоскости колебанiй николя и оси Nm . Въ согласiи съ этой особенностью стоитъ и вообще отсутствiе сколько нибудь отчетливой картины пониженiя цвѣтовъ изслѣдуемой полоски при компенсацiи. Нѣкоторое объясненiе этого мы найдемъ въ слѣдующихъ соображенiяхъ:

Представимъ себѣ, что оси симметрiи изслѣдуемаго сѣченiя зерна кальцита имѣютъ положенiе, ось $Nm - Nm_1$ и перпендикулярная къ ней нѣкоторая произвольная по величинѣ между Nm и Np ось $Nm - Nm_1$ (фиг. 1). Оси симметрiи параллельнаго ему сѣченiя двойниковой полоски— Nm_2 и Nn_2 , причемъ Nm_2 образуетъ уголъ α съ осью Nm_1 . Знаки $+$ и $-$ показываютъ направленiя осей, считая отъ

центра, которыя мы считаемъ положительными и отрицательными.

Простой или поляризованный лучъ свѣта, вступающа въ зерно кальцита, разложится на два съ колебанiями по Nm_1 и по Nn_1 . Назовемъ амплитуду перваго черезъ A и амплитуду втораго черезъ B . Каждое изъ этихъ колебанiй при переходѣ въ область двойниковой пластинки замѣнится въ свою очередь двумя другими колебанiями, изъ которыхъ одно будетъ отвѣчать направленiю Nm_2 , другое Nn_2 . Такимъ образомъ по каждому изъ этихъ направлений будутъ совершаться два колебанiя. Назовемъ ампли-



Фиг. 1.

туды ихъ по Nm_2 черезъ A_1 и B_2 и по Nn_2 черезъ A_2 и B_1 . Изъ данныхъ фиг. 1 можемъ видѣть, что A_1 и B_2 разныхъ знаковъ именно A_1 положительно, B_2 отрицательно, A_2 и B_1 оба положительны. Величины амплитудъ A_1 , B_2 , A_2 и B_1 легко найдемъ:

$$\begin{aligned} A_1 &= A \cos \alpha & B_2 &= -B \sin \alpha \\ A_2 &= A \sin \alpha & B_1 &= B \cos \alpha \dots 1 \end{aligned}$$

Лучи съ колебанiями по Nm_1 и Nn_1 распространяются съ различной скоростью и къ моменту вступленiя ихъ въ двойниковую пластинку они должны обладать нѣкоторой разностью фазъ, которую обозначимъ черезъ $\varphi_m - \varphi_{n1}$. Принимая во вниманiе эту разность фазъ, найдемъ для амплитудъ τ_{m2} и τ_{n2} сложнаго колебанiя, являющагося результатомъ сложения колебанiй, совершающихся по Nm_2 и Nn_2 , согласно общезвѣстному выводу¹⁾ слѣдующiя значенiя:

¹⁾ См. табл. V.

²⁾ По табл. она должна бы быть голубовато-зеленою.

¹⁾ См. напр. стран. 3 моего курса „Универсальный методъ Федорова“.

$$\left. \begin{aligned} \eta_{m2}^2 &= A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cos(\varphi_m - \varphi_{n1}) \\ \eta_{n2}^2 &= A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha - 2AB \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cos(\varphi_m - \varphi_{n1}) \end{aligned} \right\} . 2).$$

Разность фазъ можемъ выразить въ зависимости отъ разности хода $\sigma_{n1} - \sigma_m$ и длины волны λ ¹⁾.

$$\varphi_m - \varphi_n = \frac{2\pi(\sigma_{n1} - \sigma_m)}{\lambda}$$

Называя длину пути, пройденнаго лучами въ предѣлахъ зерна кальцита до вступленія въ двойниковую пластинку черезъ ϵ , и припоминая, что ²⁾

$$\sigma_{n1} - \sigma_{m1} = \epsilon_1 (N_m - N_{n1})$$

получимъ

$$\varphi_m - \varphi_{n1} = \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \dots 3).$$

Подставляя это выраженіе въ формулы (2), при-
дадимъ имъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{m2}^2 &= A^2 \cos^2 \alpha + B^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cos \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \\ \eta_{n2}^2 &= A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha - 2AB \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cos \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \end{aligned} \right\} . 4).$$

Пройдя двойниковую пластинку, лучи снова вступаютъ въ то же основное зерно кальцита, и каждый изъ нихъ долженъ дать два луча съ колебаніями N_{m1} и N_{n1} . Амплитуды этихъ отдѣльныхъ колебаній должны быть равны:

$$\begin{aligned} \text{по } N_{m1} &\text{ — } \eta_{m2} \cos \alpha \text{ и } \eta_{n2} \sin \alpha \\ \text{по } N_{n1} &\text{ — } \eta_{m2} \sin \alpha \text{ и } \eta_{n2} \cos \alpha. \end{aligned}$$

За время прохожденія въ предѣлахъ двойниковой пластинки также должна образоваться нѣкоторая разность фазъ $\varphi_m - \varphi_{n2}$, которая, если назовемъ длину пути лучей въ предѣлахъ двойниковой пластинки черезъ ϵ_2 , должна равняться

$$\varphi_m - \varphi_{n2} = \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda}$$

Располагая этими данными, мы можемъ найти амплитуды η_{m1} и η_{n1} колебаній, получающихся въ результатъ сложения каждыхъ двухъ колебаній совершенно такъ же, какъ мы это сдѣлали при нахожденіи η_{m2} и η_{n2} . Но выраженія, которыя мы

получимъ такимъ путемъ, должны быть очень сложными. Для упрощенія обратимся къ частному случаю, именно предположимъ, что

$$\alpha = 45^\circ.$$

Тогда $\sin \alpha = \cos \alpha$ и

$$\begin{aligned} \eta_{m2}^2 &= \sin^2 \alpha \left[A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{2\pi \epsilon_1 (N_{m2} - N_{n2})}{\lambda} \right] \\ \eta_{n2}^2 &= \sin^2 \alpha \left[A^2 + B^2 - 2AB \cos \frac{2\pi \epsilon_1 (N_{m1} - N_{n1})}{\lambda} \right] \\ \eta_{m1}^2 &= \sin^4 \alpha [2A^4 + 2B^2] - 2 \sin^4 \alpha \sqrt{(A^2 + B^2)^2 -} \\ &\quad - 4A^2 B^2 \cos^2 \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \cdot \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \\ &= 2 \sin^4 \alpha \left[A^2 + B^2 - \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2 B^2} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos^2 \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \right] \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \right] \\ \eta_{n1}^2 &= 2 \sin^4 \alpha \left[A^2 + B^2 + \sqrt{A^4 + B^4 + 2A^2 B^2} \left[1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \cos^2 \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \right] \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \right] \dots 5) \end{aligned}$$

При $B = A$

$$\begin{aligned} \eta_{n1}^2 &= 4A^2 \sin^4 \alpha \left[1 - \sqrt{1 - \cos^2 \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda}} \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \right] = \\ \eta_{m1}^2 &= 4A^2 \sin^4 \alpha \left[1 - \sin \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \right] \\ \eta_{n1}^2 &= 4A^2 \sin^4 \alpha \left[1 - \sin \frac{2\pi \epsilon_1 (N_m - N_{n1})}{\lambda} \right. \\ &\quad \left. \cos \frac{2\pi \epsilon_2 (N_m - N_{n2})}{\lambda} \right] \dots 6) \end{aligned}$$

Формулы (5) и (6) показываютъ, что выраженія амплитуды равнодѣйствующаго двухъ колебаній по осямъ N_m и N_{n1} основного зерна кальцита отличаются другъ отъ друга только знакомъ передъ членомъ, въ составъ котораго входятъ sinus разности фазъ, создаваемой основнымъ зерномъ кальцита и cosinus разности фазъ, создаваемой двойниковой пластинкой.

Въ томъ случаѣ, когда мы ведемъ изслѣдованіе въ присутствіи анализатора и плоскость колебаній параллельна оси N_m изслѣдуемаго зерна кальцита, амплитуда наблюдаемыхъ колебаній должна отвѣчать η_{m1} ; въ томъ случаѣ, когда ось N_m перпендикулярна къ плоскости колебаній анализатора, мы должны наблюдать колебанія съ амплитудой η_{n1} . Та-

¹⁾ См. напр. тамъ же стр. 157.

²⁾ Тамъ же форм. (41) на стр. 150.

кимъ образомъ, если мы найдемъ способъ измѣнять, при наблюдении знакъ послѣдняго члена формулы (95), не мѣняя величины отдѣльныхъ членовъ, то получимъ возможность переходить отъ картины, наблюдаемой при Nm параллельномъ плоскости колебаний анализатора къ картинѣ, отвѣчающей той, которая получается послѣ поворота анализатора на 90° .

Примѣняя компенсаторъ въ тѣхъ условіяхъ, въ которыхъ мы это дѣлали, т. е. вводя его подъ угломъ 95° къ осямъ Nm_1 и Nn_1 основного зерна кальцита и вмѣстѣ къ плоскости колебаний анализатора, мы измѣняли величину разности хода создаваемой при пересѣченіи лучами двойниковой пластинки.

$$\varepsilon_2(Nm - Nn_2)$$

Допустимъ, что при помощи компенсатора мы придадимъ къ этой разности хода или вычтемъ изъ нея разность хода

$$\Delta = \frac{\lambda}{2}$$

Тогда разность фазъ, получающаяся при пересѣченіи лучами системы двойниковой пластинки и компенсатора должна быть равна

$$\delta\varphi = \frac{2\pi \left[\varepsilon_2(Nm - Nn_2) \pm \frac{\lambda}{2} \right]}{\lambda} = \frac{2\pi\varepsilon_2(Nm - Nn_2)}{\lambda} \pm \pi$$

$$\text{и } \cos \delta\varphi = -\cos \frac{2\pi\varepsilon_2(Nm - Nn_2)}{\lambda}$$

Такимъ образомъ, придавая или отнимая при помощи компенсатора отъ разности хода, созданной двойниковой пластинкой, разность хода, равную половинѣ длины волны употребленнаго при опытѣ монохроматическаго свѣта, мы должны получить въ указанныхъ выше условіяхъ, измѣненіе въ наблюдаемой картинѣ, соответствующее перемѣнѣ знака передъ послѣднимъ членомъ въ формулѣ (6) или (5), и перейти отъ картины, наблюдаемой при Nm параллельномъ плоскости колебаний анализатора, къ картинѣ, отвѣчающей перпендикулярному положенію оси Nm и наоборотъ.

Это вполне подтверждается отмѣченными нами при наблюдении фактами полученія, при введеніи компенсатора, картины, наблюдаемой безъ компенсатора послѣ поворота анализатора на 90° ¹⁾, такъ и тѣмъ, что показывается въ этотъ моментъ компенсаторомъ разность хода отвѣчаетъ приблизительно половинѣ длины волны одного изъ среднихъ цвѣтовъ спектра ²⁾. Работая въ сложномъ не монохро-

¹⁾ См. стран. 159 и табл. II.

²⁾ Табл. II, III и стр. 161.

матическомъ свѣтѣ, мы и должны были получить этотъ результатъ.

Но въ формулу (6) входитъ и величина разности фазъ, создаваемой при распространении свѣта въ области основного зерна кальцита въ видѣ

$$\sin \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_1 (Nm - Nn_1)$$

Если это отвѣчаетъ дѣйствительности, то измѣненіе разности хода $\varepsilon_1 (Nm - Nn_1)$ на величину $\frac{\lambda}{2}$ должно также создавать измѣненіе знака послѣдняго члена формулы, не мѣняя его величины, и тѣмъ приводить къ переходу отъ окраски, наблюдаемой при Nm перпендикулярномъ плоскости колебаний николя къ окраскѣ, отвѣчающей ихъ параллельности. Между тѣмъ наблюдение этого не подтверждаетъ: введеніе компенсатора параллельно осямъ основного зерна кальцита не вызываетъ никакихъ измѣненій въ окраскѣ двойниковыхъ полосокъ кальцита.

Выше (стр. 161) мы пришли къ заключенію, что дѣйствіе системы двойника кальцита аналогично дѣйствію николя, въ которомъ плоскость колебаний совпадаетъ съ осью Nm изслѣдуемаго сѣченія основного зерна кальцита. Если это такъ, то, очевидно, что введеніе компенсатора параллельно или перпендикулярно оси Nm аналогично введенію его параллельно или перпендикулярно плоскостямъ колебаний въ поляризаторѣ или анализаторѣ при скрещенныхъ или при параллельныхъ николяхъ и не можетъ создать никакой дополнительной разности хода.

Въ тоже время, если система двойника играетъ роль николя съ плоскостью колебаний, совпадающей съ осью Nm , то очевидно, что амплитуды двухъ колебаний, совершающихся по направленимъ Nm_1 и Nn_1 (фиг. 1), передаются системой двойника далеко не въ равной степени и въ результатѣ въ лучахъ, пропущенныхъ двойникомъ, преобладаютъ лучи съ колебаніями по Nm_1 . Это условіе мы можемъ выразить, принявъ формулахъ (5) В незначительнымъ по сравненію съ A или иначе принявъ $B = 0$. Тогда получимъ

$$\begin{aligned} \eta_{m_1}^2 &= 2 \sin^4 \alpha \left[A^2 - \sqrt{A^4} \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 (Nm - Nn_2) \right] = \\ &= 2A^2 \sin^4 \alpha \left[1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon_2 (Nm - Nn_2) \right] = \\ &= 4A^2 \sin^4 \alpha \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon_2 (Nm - Nn_2). \quad \text{Откуда} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_{m_1} &= 2A \sin^2 \alpha \sin \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon_2 (Nm - Nn_2) \\ \text{и } \eta_{n_1} &= 2A \sin^2 \alpha \cos \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon_2 (Nm - Nn_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots 7)$$

Очевидно, выведенныя формулы точно такъ же, какъ и формулы (6) удовлетворятъ условіямъ наблю-

денія въ томъ отношеніи, что приводятъ величину ηm_1 къ ηm_2 и наоборотъ, при измѣненіи величины разности хода ε_2 ($Nm - Nm_2$) на величину $\pm \frac{\lambda}{2}$.

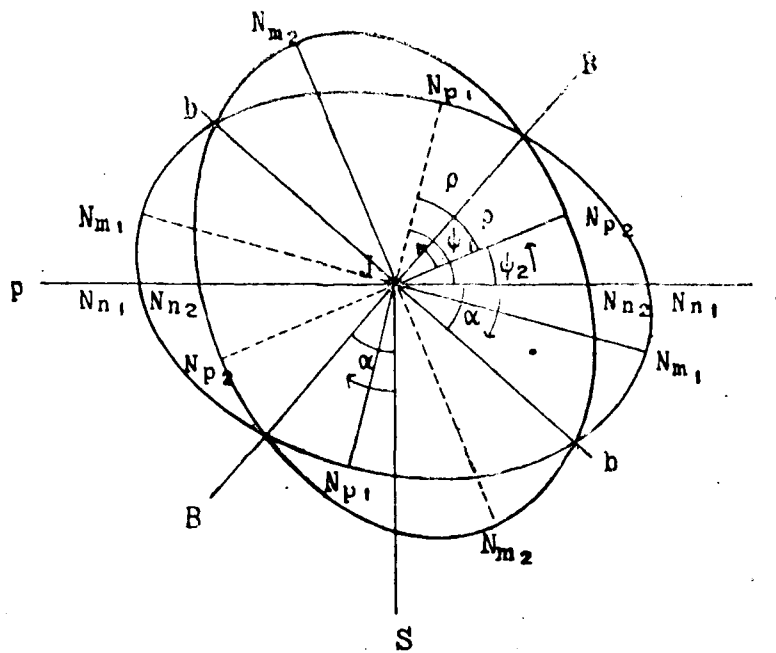
Отмѣченная нами на стр. 20 аномалія, именно отсутствіе какой либо разницы въ показаніяхъ компенсатора при введеніи его во взаимно перпендикулярныхъ положеніяхъ, при одномъ и томъ же относительномъ положеніи плоскости колебаній николя и оси Nm , объясняется тѣмъ, что мы наблюдали не моментъ компенсаціи, а только моментъ окраски, отвѣчающій перпендикулярному положенію оси Nm .

Причины, благодаря которымъ не удается наблюдать ни момента компенсаціи ни сколько-нибудь явственнаго пониженія или повышенія цвѣтовъ въ началѣ введенія компенсатора, мнѣ не ясны. Осуществленіе опытнымъ путемъ условій наблюденія, отвѣчающихъ двойниковымъ пластинкамъ кальцита очень трудно. Мы легко можемъ приготовить пластинки кальцита съ извѣстной намъ ориентировкой, воспользовавшись хотя бы хорошей спайностью кальцита, но, устраивая разнообразныя сочетанія изъ этихъ пластинокъ, мы не будемъ въ состояніи установить между ними непосредственное соприкосновеніе: между пластинками всегда будетъ какая либо промежуточная среда (воздухъ, глицеринъ, канадскій бальзамъ и пр.), а это обстоятельство кореннымъ образомъ мѣняетъ условія, наблюдаемыя въ двойниковыхъ пластинкахъ кальцита.

Дѣйствительно, проходящіе ихъ лучи представляются поляризованными съ колебаніями, направленными по оси Nm основного индивида кальцита. Слѣдовательно, система такого двойника преимущественно пропускаетъ лучи съ колебаніями по Nm и отражаетъ лучи съ колебаніями по перпендикулярной къ ней оси сѣченія Nn . Это наблюдается всегда, независимо отъ положенія оси Nm по отношенію къ плоскости двойниковой пластинки. Между тѣмъ для системы пластинокъ кальцита ось Nm , около которой мы должны наклонять всю систему, всегда будетъ оставаться параллельной плоскости, раздѣляющей пластинки, т. е. отражающей плоскости, и отраженію подвергнутся преимущественно лучи съ колебаніями по Nm , а въ лучахъ, проникшихъ черезъ систему пластинокъ, будутъ преобладать лучи съ колебаніями, перпендикулярными оси Nm . Опытъ, дѣйствительно, это подтверждаетъ.

Если въ лучахъ, пропускаемыхъ двойниковыми пластинками кальцита преобладаютъ лучи съ колебаніями по оси Nm , то это, очевидно, обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что эта ось является неизмѣнно однимъ изъ направлений колебаній въ

каждомъ сѣченіи cadaго изъ индивидовъ кальцита, т. е. какъ основного зерна, такъ и вросшихъ въ него въ двойниковомъ положеніи пластинокъ. Лучи, мѣняющіе свои колебанія отъ направленія оси Nm_1 основного зерна кальцита па направленіе оси Nm_2 двойниковой пластинки и затѣмъ снова возвращающіеся къ колебаніямъ по направленію Nm_1 , будутъ въ каждомъ изъ индивидовъ кальцита обладать однимъ и тѣмъ же коэффициентомъ преломленія $Nm = 1,658$ и, слѣдовательно, пройдутъ всю систему безъ преломленія и безъ отраженія на контактовыхъ плоскостяхъ. Наоборотъ, лучамъ съ колебаніями по перпендикулярнымъ къ Nm направленіямъ Nn_1 и Nn_2 (фиг. 1) будутъ отвѣчать вообще различныя коэффициенты преломленія, слѣдствіемъ чего будутъ явленія преломленія и отраженія и при этомъ неизбежная потеря части энергіи этихъ лучей. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ при этомъ можетъ наблюдаться и явленіе полного внутренняго отраженія.



Фиг. 2.

Разсмотримъ немного ближе условія возможныхъ здѣсь явленій. Предположимъ частный случай, именно предположимъ, что мы имѣемъ дѣло съ случаемъ, когда лучъ распространяется по какому либо изъ направлений S (фиг. 2), лежащему въ общей для эллипсоидовъ обоихъ индивидовъ плоскости симметріи, т. е. въ плоскости, проходящей черезъ оси

вращения Np_1 и Np_2 обоихъ индивидовъ; предположимъ также, что общая обоимъ индивидамъ ось Nm совмѣщена съ осью I столика и мы наклоняемъ препаратъ около этой осн. Фиг. 2 представляетъ разрѣзъ эллипсоидовъ плоскостью, перпендикулярной къ оси I. Линія bb слѣдъ на этой плоскости двойниковой плоскости, линія pp слѣдъ плоскости, перпендикулярной къ оси микроскопа. BB —перпендикулярная къ двойниковой плоскости двойниковая (бинарная) ось.

Лучъ свѣта, вступающій въ среду 1-го индивида распадается на два луча, одинъ съ колебаніями по совмѣщенной съ осью I оси Nm , другой по перпендикулярному къ ней и вмѣстѣ къ оси микроскопа направленію pp , совпадающему съ однимъ изъ диаметровъ эллипсоида 1-го индивида, промежуточнымъ по величинѣ между Np и Nm . Лучъ съ колебаніями по Nm , такъ какъ данная ось Nm общая обоимъ индивидамъ, будетъ распространяться въ средѣ 2-го индивида съ тѣмъ же направленіемъ колебаній и, какъ мы упомянули выше, никакого преломленія не претерпитъ, лучъ же съ перпендикулярнымъ къ оси Nm направленіемъ колебаній Nn_1 будетъ во 2-мъ индивидѣ совершать колебанія по диаметру эллипсоида Nn_2 , вообще неравному Nn_1 , но больше или меньше его. Въ томъ случаѣ, если $Nn_2 < Nn_1$, будетъ возможно, при нѣкоторой величинѣ угла паденія луча α , полное внутреннее отраженіе его.

Оси Np обоихъ индивидовъ, т. е. Np_1 и Np_2 должны образовать равные между собой углы ρ съ бинарной осью B . Для однооснаго минерала этотъ уголъ равенъ полярному разстоянію ρ двойниковой плоскости; для кальцита полярное разстояніе грани $(1012) \dots \rho = 26^\circ 15'$. Назовемъ уголъ, образуемый осью Np_1 съ плоскостью зрѣнія или со слѣдомъ ея pp черезъ ψ_1 и такой же уголъ для Np_2 черезъ ψ_2 и замѣтимъ, что уголъ между двойниковой плоскостью bb и плоскостью зрѣнія pp равенъ углу паденія α луча s на двойниковую плоскость. Углы ψ и α условимся считать отъ плоскости зрѣнія pp или отъ направленія луча s , при чемъ принимаемъ ихъ положительными, когда отсчитываемъ острый уголъ по направленію часовой стрѣлки, и отрицательными въ обратномъ случаѣ. На фиг. 2 уголъ α положителенъ, а ψ_1 и ψ_2 отрицательны.

Изъ данныхъ фиг. 2 можемъ видѣть:

$$-\psi_2 = -\psi_1 - 2\rho \text{ или } \psi_2 = \psi_1 + 2\rho \dots \dots \dots 8)$$

$$\alpha = 90^\circ - (-\psi_2) - \rho = 90^\circ + \psi_2 - \rho \dots \dots \dots 9)$$

Если замѣнимъ въ послѣдней формулѣ ψ_2 черезъ ψ_1 , получимъ:

$$\alpha = 90^\circ + \psi_1 + 2\rho - \rho = 90^\circ + \psi_1 + \rho.$$

Полученная для α величина больше 90° ¹⁾, и такъ какъ мы условились принимать въ расчетъ только острые углы, то слѣдуетъ за уголъ α принять до-полненіе полученной величины до 180° , при чемъ эту величину мы должны будемъ считать отрицательной.

$$-\alpha = 180^\circ - 90 - (\psi_1 + \rho) = 90 - (\psi_1 + \rho).$$

Отсюда

$$\alpha = (\psi_1 + \rho) - 90^\circ \dots \dots \dots 10)$$

Наибольшее различіе въ условіяхъ распространенія луча съ колебаніями по Nm въ предѣлахъ основного зерна и двойниковой пластинки будетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда въ одномъ изъ индивидовъ Nm совпадаетъ съ осью Np или Nm . Для того, чтобы при этомъ имѣло мѣсто явленіе полного внутренняго отраженія, необходимо, чтобы Nn_1 было $> Nn_2$. Для того, чтобы получить максимальную величину разности коэффициентовъ преломленія N_1 и N_2 при этомъ условіи, мы должны принять:

$$1) Nn_2 = Np \text{ или } 2) Nn_1 = Nm.$$

Положимъ $Nn_2 = Np = 1,486$.

Въ этомъ случаѣ, очевидно (см. фиг. 2).

$$\psi_2 = 0$$

и изъ форм. 8)

$$\psi_1 = -2\rho = -52^\circ 30' \text{ } ^2)$$

Зная величину ψ_1 и величину двупреломленія кальцита $Nm - Np = 0,172$ ³⁾ легко найдемъ, пользуясь соответствующими таблицами ⁴⁾ или диаграммами А. К. Болдырева ⁵⁾ величину двупреломленія въ сѣченіи $Nm Nn_1$.

$$Nm - Nn_1 = 0,0575 \text{ и } Nn_1 = 1,6585 - 0,0575 = 1,601$$

Такимъ образомъ въ рассматриваемомъ нами случаѣ коэффициентъ преломленія луча при переходѣ изъ основного зерна кальцита въ двойниковую пластинку измѣняется отъ величины 1,601 до 1,486. Зная это, легко находимъ предѣльную минимальную величину угла, при которомъ наступаетъ полное внутреннее отраженіе

$$\sin \alpha_0 = \frac{1,486}{1,601} \text{ и } \alpha_0 = 68^\circ 9' \text{ } ^6)$$

На самомъ дѣлѣ согласно формулѣ (9).

$$\alpha = 90^\circ + 0 - 26^\circ 15' = 63^\circ 45'$$

т. е. α меньше угла полного внутренняго отраженія.

1) При ψ_1 положительномъ.

2) См. стр. 156.

3) Для простоты можемъ принять $Nm - Np = 0,170$.

4) См. мой курсъ «Универсальный методъ Федорова» стр. 225.

5) Зап. Мин. Общ. ч. XI.VIII вып. 1.

6) Если бы мы задались положеніемъ, при которомъ $Nn_1 = Nm$, то получили бы $Nn_2 = 1,555$ и $\alpha_0 = 69^\circ 42'$ почти на $1^\circ 42'$ больше чѣмъ въ 1-мъ случаѣ.

Увеличивая уголъ α , уменьшимъ разность коэффициентовъ преломленія $N_1 - N_2$ и увеличимъ величину угла полного внутренняго отраженія, но, очевидно, все же можемъ ожидать, что при нѣкоторой величинѣ угла α полное внутреннее отраженіе наступитъ. Дѣйствительно, задаемъ угломъ

$$\alpha = 70^\circ 45'$$

Изъ форм. (10) и (8).

$$\psi_1 = 70^\circ 45' + 90^\circ - 26^\circ 15' = 134^\circ 30' \text{ или } \psi_1 = -45^\circ 30'$$

$$\psi_2 = -45^\circ 30' + 52^\circ 30' = 7^\circ$$

Согласно таблицамъ ¹⁾

$$N_m - N_{n_1} = 0,077 \text{ и } N_{n_1} = 1,658 - 0,077 = 1,581$$

$$\text{и } N_m - N_{n_2} = 0,166 \text{ и } N_{n_2} = 1,658 - 0,166 = 1,492$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{1,492}{1,581} \quad \alpha_0 = 70^\circ 41' \text{ 2)}$$

Полное внутреннее отраженіе имѣетъ мѣсто при углахъ паденія α , равныхъ или больше $70^\circ 40'$ или иначе при величинахъ угла ψ , образуемаго плоскостью ($\bar{1}102$) съ осью микроскопа, равныхъ или меньше $19^\circ 20'$.

Данныя наблюденія (таб. I) показываютъ, что при этой величинѣ угла явленіе окраски полосокъ иногда еще только что успѣваетъ проявиться, наиболѣе же яркое развитіе пріобрѣтаетъ при значительно большей величинѣ угла ψ и заканчивается только при углахъ отъ 40° до 60° . Изъ этого очевидно, что, если полное внутреннее отраженіе и играетъ какую нибудь роль въ изучаемомъ нами явленіи, то только очень незначительную. Причины его должны быть другія. Скорѣе всего поляризація свѣта въ двойниковыхъ зернахъ кальцита вызывается какъ мы уже упомянули ³⁾, потерей части энергіи лучей, колебанія которыхъ совершаются по перпендикулярнымъ къ осямъ Nm направленіямъ Nn . Эта потеря энергіи происходитъ главнымъ образомъ за счетъ отраженія такихъ лучей. Нужно замѣтить, что въ этомъ утвержденіи есть своего рода парадоксальность.

Дѣйствительно, по отношенію къ положенію ко-

¹⁾ Табл. XLVI моего курса «Универсальный методъ Федорова».

²⁾ Нужно впрочемъ сказать, что полученная нами величина не будетъ точна, такъ какъ найденная по таблицамъ или диаграммамъ величина двупреломленія какого-либо косоугольнаго эллипсоида не будетъ отвѣчать дѣйствительности (см. «Универсальный методъ» стр. 288), но въ данномъ вопросѣ это не имѣетъ для насъ значенія.

³⁾ См. стр. 166.

лебаній по оси Nm и перпендикулярному къ ней направленію можно бы думать, что отраженію должны подвергаться преимущественно лучи съ колебаніями по Nm , такъ какъ направленія осей Nm всѣ образуютъ очень острые углы съ отражающей двойниковой плоскостью ромбоэдра ($\bar{1}012$). Последнее слѣдуетъ изъ того, что полярное разстояніе плоскости ($\bar{1}012$) кальцита или иначе уголъ между перпендикуляромъ къ этой плоскости и осью Np равенъ $26^\circ 15'$. Такъ какъ же, слѣдовательно, и уголъ между діаметромъ круговаго сѣченія эллипсоида и двойниковой плоскостью: откуда слѣдуетъ, что максимальная величина угла между направленіями колебаній по Nm и отражающей плоскостью не можетъ превзойти тѣхъ же $26^\circ 15'$. Между тѣмъ уголъ между вторымъ направленіемъ колебаній и отражающей плоскостью ($\bar{1}012$) можетъ быть какъ угодно великъ.

Въ виду этого можно думать:

1) что, если бы мы не имѣли дѣла съ одноосными минералами и коэффициентъ преломленія для одного изъ лучей не оставался бы при переходѣ изъ одного индивида въ другой постояннымъ, то и самое явленіе поляризаціи свѣта не могло бы проявиться;

2) что отраженію, вѣроятно, подвергаются преимущественно не столько колебанія по Nm_1 , сколько та часть энергіи колебаній по Nm_1 , которая по пересѣченіи отражающей плоскости даетъ слагающую по Nn_2 .

Поляризація при отраженіи зависитъ, какъ известно, отъ угла паденія луча. При малыхъ величинахъ угла она едва замѣтна, но, начиная съ нѣкоторой величины этого угла, называемой угломъ поляризаціи, она становится уже явственно замѣтной.

Разсматривая изображеніе черезъ николь, мы замѣтимъ при этомъ углѣ паденія почти полное погасаніе изображенія тогда, когда плоскость колебанія луча въ николь будетъ совпадать съ плоскостью паденія и наибольшую яркость изображенія при перпендикулярности этихъ плоскостей. Величина угла поляризаціи Φ опредѣляется согласно закону Brewster'a ¹⁾ соотношеніемъ:

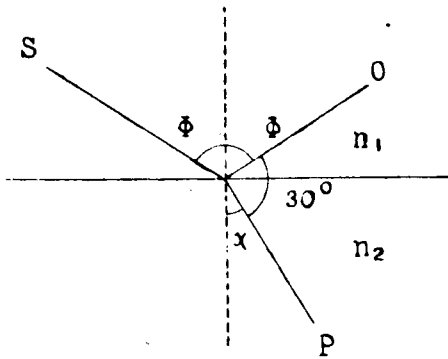
$$\tan \Phi = n \quad \dots \dots \dots 11)$$

гдѣ n коэффициентъ преломленія отражающей среды, при чемъ предполагается, что наблюденіе происходитъ въ воздухѣ. Изъ закона Brewster'a вытекаетъ какъ слѣдствіе перпендикулярность при углѣ

¹⁾ О. Хвольсонъ. Курсъ физики Т. II, стр. 647. 1904 г. 166.

поляризации между отраженнымъ и преломленнымъ лучемъ.

Исходя изъ послѣдняго положенія мы можемъ обобщить законъ Brewster'a и на тѣ случаи, когда средой, въ которой происходитъ отраженіе



Фиг. 3.

луча, является не воздухъ, а какое либо вещество съ коэффициентомъ преломленія n_1 . Коэффициентъ преломленія отражающей среды назовемъ черезъ n_2 . Очевидно, (фиг. 3).

$$\frac{\sin \Phi}{\sin \chi} = \frac{n_2}{n_1}$$

но

$$\chi = 180^\circ - 90^\circ - \Phi \quad \sin \chi = \cos \Phi.$$

Откуда:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{n_2}{n_1} \dots \dots \dots 12)$$

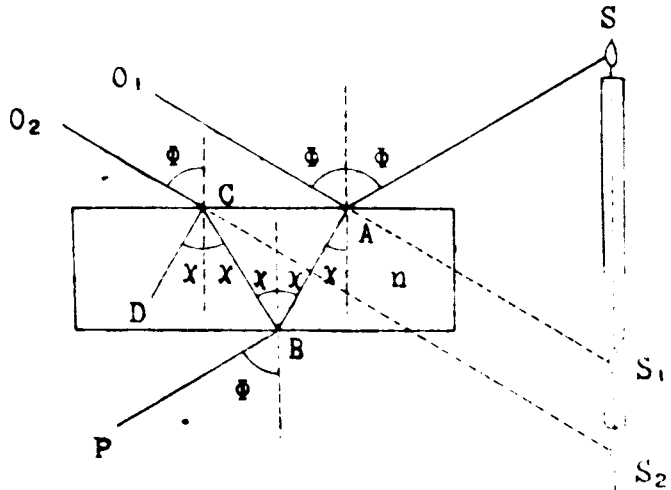
Очень простымъ опытомъ можно подтвердить справедливость этого обобщенія по крайней мѣрѣ для того случая, когда одной средой является также воздухъ, но онъ служитъ не средой распространения падающаго и отраженнаго луча, а отражающей средой. Возьмемъ толстую стеклянную пластинку (фиг. 4) и будемъ наблюдать черезъ николю отраженіе въ ней пламени свѣчи S отъ наружной поверхности стекла AC и отъ внутренней B.

Измѣняя уголъ паденія и вращая николю, мы замѣтимъ совершенно одновременныя аналогичныя измѣненія въ яркости отраженій S_1 и S_2 и совершенно одновременное сильное ослабленіе свѣта при увеличеніи угла паденія до угла поляризаціи (55°) стекла. Этого мы и должны ожидать.

Въ симомъ дѣлѣ, какъ въ точкѣ A отраженный и преломленный лучи AO_1 и AB образуютъ прямую

уголь, такъ перпендикулярны они между собой и въ точкахъ B и C ¹⁾.

Изъ данныхъ наблюденія мы замѣчаемъ, что, если для случая отраженія луча отъ стекла въ воздушной средѣ величина угла поляризаціи опредѣ-



Фиг. 4.

ляется соотношеніемъ $\operatorname{tg} \Phi = n$, то для случая отраженія свѣта отъ воздушнаго слоя въ стеклѣ она должна опредѣляться соотношеніемъ.

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{1}{n} \dots \dots \dots 13)$$

Формула (12) отвѣчающая болѣе общему случаю, очевидно, отвѣчаетъ и частному случаю формулы (13).

Нашъ опытъ показываетъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что даже при отраженіи подъ угломъ поляризаціи или болѣе широкимъ его въ преломленныхъ лучахъ остается большой процентъ лучей съ колебаніями, параллельными отражающей плоскости, такъ какъ при положеніяхъ, когда плоскость колебаній николя перпендикулярна къ плоскости паденія яркость изображенія S_2 еще очень значительна не смотря на то, что часть его лучей терится вновь при отраженіи въ точкѣ C.

Можно думать, что степень поляризаціи свѣта при отраженіи зависитъ отъ степени различія коэф-

¹⁾ Это слѣдуетъ изъ того, что въ каждой изъ этихъ точекъ лучи BC и CD и BP и CO, образуютъ одни и тѣ же углы χ и Φ съ перпендикуляромъ къ плоскости пластинки, а $180^\circ - (\Phi + \chi) = 90^\circ$.

коэффициентов преломления отражающей среды и среды распространения отраженного луча. Чемъ больше это различіе, тѣмъ больше будетъ въ отраженныхъ лучахъ процентъ лучей съ колебаніями, перпендикулярными плоскости паденія, а въ преломленныхъ— процентъ лучей съ колебаніями параллельными этой плоскости.

Уголъ поляризаціи Φ , какъ показываетъ форм. (12) при уменьшеніи различія между коэффициентами преломления n_1 и n_2 не только не будетъ возрастать, но будетъ убывать, стремясь въ предѣлѣ къ

$$\Phi = 45^\circ.$$

Дѣйствительно, при $n_1 = n_2$ $\operatorname{tg} \Phi = 1$.

$$\Phi = 45^\circ.$$

Въ нашемъ случаѣ перехода свѣта изъ одного индивида двойника кальцита въ другой различіе коэффициентов преломления начтожно и уголъ поляризаціи долженъ быть близокъ къ 45° . Слѣдовательно, близокъ долженъ быть къ той же величинѣ и предѣльный максимальный уголъ между направлениемъ луча и отражающей плоскостью ромбоэдра (1012), названный нами выше угломъ ψ , при которомъ происходитъ болѣе или менѣе замѣтная поляризаціи луча при отраженіи. Обращаясь къ таб. I мы находимъ, что для наблюденій 2 и 3, дѣйствительно, исчезновеніе окраски полосокъ наблюдается при величинахъ ψ , близкихъ къ 45° , но для наблюденія 1 окраска исчезаетъ при ψ выше 60° . Такимъ образомъ, если поляризаціи при отраженіи и играетъ роль въ созданіи разсматриваемаго нами явленія, то во всякомъ случаѣ, не исключительную.

Вѣроятно же всего, что главнымъ факторомъ поляризаціи здѣсь служитъ потеря энергій лучей обладающихъ колебаніями, перпендикулярными къ оси Nm каждаго даннаго сѣченія индивида, частью путемъ отраженія ея, частью путемъ поглощенія при преломленія и, вѣроятно, въ малой зависимости отъ положенія линіи колебанія этихъ лучей по отношенію къ отражающей плоскости.

Резюмируя важнѣйшіе факты и выводы изслѣдованія, мы можемъ сказать:

1) Явленіе псевдохроизма двойниковыхъ полосокъ кальцита проявляется тогда, когда двойниковая пластинка образуетъ съ оптической осью микроскопа уголъ ψ не меньше 5° , чаще 15° — 20° и не больше 62° , иногда не больше 50° и даже только 40° (Таб. I).

2) Въ присутствіи николя наиболѣе опредѣленная окраска двойниковыхъ полосокъ отвѣчаетъ моментамъ совпаденія съ плоскостью колебаній въ николѣ одной изъ осей перпендикулярнаго къ оси

микроскопа сѣченія эллипсоида основного зерна кальцита, прорѣзаннаго двойниковой полоской. При этомъ окраска различна въ зависимости отъ того, какая изъ двухъ осей даннаго сѣченія совпадаетъ съ плоскостью колебаній въ николѣ, одна ли изъ осей Nm круговаго сѣченія эллипсоида или перпендикулярная къ ней ось эллиптического сѣченія, отвѣчающая нѣкоторому произвольному диаметру Nz эллипсоида.

Для краткости мы будемъ называть положеніе, когда ось Nm параллельна плоскости колебаній въ николѣ „параллельнымъ“ положеніемъ, а когда она перпендикулярна, — „перпендикулярнымъ“. Одно положеніе по отношенію къ другому будемъ называть „противоположнымъ“.

3) Введеніе компенсатора между препаратомъ и анализаторомъ подъ угломъ 45° къ осямъ сѣченія основного зерна кальцита въ „параллельномъ“ или „перпендикулярномъ“ положеніи вызываетъ измѣненіе окраски двойниковыхъ полосокъ. При этомъ ни въ одномъ изъ положеній не наблюдается послѣдовательнаго пониженія цвѣтовъ; но непременно наблюдается приведеніе къ цвѣту, отвѣчающему, при отсутствіи компенсатора, „противоположному“ положенію.

Поворотъ препарата около оси J столка на 180° или одновременный поворотъ и препарата и николя на 90° никакихъ измѣненій въ картину, наблюдаемую при введеніи компенсатора, не вносятъ.

4) Если опредѣлить разность хода, показываемую компенсаторомъ въ моментъ приведенія къ окраскѣ „противоположнаго“ положенія какъ въ „перпендикулярномъ“, такъ и въ „параллельномъ“ положеніи, или опредѣлить разность между показаніями компенсатора при томъ и другомъ положеніи препарата при приведеніи полосокъ къ одной и той же интерференціонной окраскѣ, напр., къ чувствительному фіолетовому цвѣту, то получимъ цифры, сходныя между собой (Таб. III) въ предѣлахъ погрѣшностей наблюденія. Эти цифры будутъ близки къ тѣмъ разностямъ, которыя получимъ въ отсутствіи препарата для тѣхъ же интерференціонныхъ цвѣтовъ, вычитая изъ показаній компенсатора при скрещенныхъ николяхъ показанія при параллельныхъ николяхъ.

5) Если сравнимъ между собой показанія компенсатора, получаемыя въ отсутствіи препарата, при проведеніи къ одной и той же интерференціонной окраскѣ при скрещенныхъ и при параллельныхъ николяхъ, съ тѣми, которыя наблюдаются при томъ же условіи для системы, состоящей изъ двойника кальцита и николя при „перпендикулярномъ“ и „па-

параллельномъ положеніи препарата, то придемъ къ убѣжденію, что дѣйствіе системы двойника и николя при „перпендикулярномъ“ положеніи слѣдуетъ считать аналогичнымъ случаю скрещенныхъ николей, а дѣйствіе ихъ въ „параллельномъ“ положеніи — аналогичнымъ случаю параллельныхъ николей.

Разности между показаніями компенсатора, при приведеніи къ одному и тому же интерференціонному цвѣту въ аналогичныхъ случаяхъ, равны между собой для каждой данной двойниковой полоски въ предѣлахъ точности ¹⁾ нашихъ наблюденій. Но для различныхъ двойниковыхъ полосокъ эти разности варьируютъ отъ очень малой величины до 470 ²⁾ микро-микронъ.

Для большинства наблюденій, полученные разности хода приблизительно согласуются съ наблюдаемой интерференціонной окраской полосокъ при томъ же условіи параллелизаціи „перпендикулярнаго“ положенія съ скрещенными николями и „параллельнаго“ съ параллельными николями.

6) Исходя изъ наблюдаемыхъ фактовъ, можно думать, что явленіе псевдохроизма двойниковыхъ полосокъ кальцита вызывается частичной поляризацией свѣта, характеризующейся преимущественнымъ прониканіемъ черезъ систему двойника лучей съ колебаніями по оси Nm основного зерна кальцита или иначе лучей „обыкновенныхъ“ и преимущественнымъ поглощеніемъ лучей съ перпендикулярными къ Nm колебаніями или лучей „необыкновенныхъ“.

Причину этого можно видѣть въ томъ обстоятельстве, что въ каждомъ произвольномъ сѣченіи эллипсоида однооснаго минерала одной изъ осей сѣченія обязательно является діаметръ круговаго сѣченія эллипсоида или ось Nm . Въ силу этого для одного изъ двухъ лучей съ взаимно перпендикулярными направленіями колебаній, на которые расна-

дается простой или поляризованный лучъ свѣта, при распространеніи въ анизотропномъ веществѣ, именно для луча съ колебаніями по Nm , оба индивида двойника будутъ обладать однимъ и тѣмъ же коэффициентомъ преломленія. Благодаря этому часть свѣтовой энергіи, совершающая колебанія по Nm , распространяется въ системѣ двойника свободно, не претерпѣвая преломленія при переходѣ изъ одного индивида двойника въ другой и не испытывая связанной съ этимъ потери свѣта черезъ отраженіе и поглошеніе.

Наоборотъ лучамъ съ колебаніями по перпендикулярной къ Nm оси сѣченія будутъ соответствовать въ каждомъ изъ индивидовъ различные коэффициенты преломленія и, слѣдовательно, при переходѣ изъ одного индивида въ другой эти лучи будутъ испытывать преломленіе и отраженіе и связанную съ ними потерю энергіи.

7) Подвергая явленія, происходящія въ системѣ двойника, элементарному математическому анализу, мы получаемъ для величины амплитуды луча какой либо длины λ въ „параллельномъ“ и „перпендикулярномъ“ положеніи препарата и николя формулы (7), отличающіяся другъ отъ друга только тѣмъ, что въ то время, какъ въ первомъ случаѣ въ формулу входитъ \sin разности фазъ, создаваемой при прохожденіи свѣта въ предѣлахъ двойниковой пластинки, во второмъ онъ замѣняется \cos разности фазъ. Благодаря этому повышеніе или пониженіе для каждой изъ формулъ разности хода лучей на величину $\frac{\lambda}{2}$ обращаетъ ее въ формулу, отвѣчающую „противоположному“ положенію.

Такія формулы вполне согласуются съ упомянутымъ подъ пунктъ (3) фактомъ полученія, при введеніи компенсатора, окраски, наблюдаемой безъ компенсатора въ „противоположномъ“ положеніи, такъ же, какъ и съ тѣмъ, что показаніе компенсатора въ этотъ моментъ равно половинѣ длины волны одного изъ среднихъ спектральныхъ цвѣтовъ (п. 4).

¹⁾ Точность эта очень мала.

²⁾ Конечно, послѣдняя цифра случайна и зависитъ отъ условій нашихъ наблюденій.

I.

17. О накоплені погрѣшностей въ ѣзѣмкѣ рудничныхъ полигоновъ.

И. М. Вахуринъ

(доложено 18 декабря).

Вопросъ о накопленіи погрѣшностей въ рудничномъ полигонѣ произвольной формы приводитъ къ разсмотрѣнію сложныхъ формулъ, не дающихъ возможности сдѣлать какіе-нибудь общіе выводы или дать общія правила для рѣшенія вопроса въ различныхъ случаяхъ практики. Причина этого заключается въ самой постановкѣ вопроса. Въ самомъ дѣлѣ если мы будемъ разсматривать ломаную линію произвольной формы, то въ виду безконечнаго разнообразія и сложности формы послѣдней, нельзя думать о возможности какого-нибудь обобщенія или упрощенія результатовъ. Возможность упрощенія начинается съ того момента, когда ломаной линіи мы припишемъ какую-нибудь закономерность, въ самомъ простомъ случаѣ представимъ себѣ данную ломаную приближающейся по своей формѣ къ прямой или на примѣръ приближающейся къ правильной формѣ, представляя изъ себя часть периметра правильного многоугольника.

Въ обычныхъ рудничныхъ полигонахъ подобная простая правильность ломаной линіи отсутствуетъ, прямые вытянутые полигоны встрѣчаются довольно рѣдко, а вышеупомянутая правильная ломаная линія еще рѣже. вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя сказать, чтобы въ формѣ обычныхъ рудничныхъ полигоновъ отсутствовала всякая закономерность по крайней мѣрѣ на рудникахъ каменноугольныхъ юга Россіи, которые мы главнымъ образомъ и имѣемъ въ виду во всемъ дальнѣйшемъ разсужденіи ¹⁾.

¹⁾ И еще одна оговорка—мы будемъ говорить лишь о положеніи точки на горизонтальной плоскости, не касаясь координаты Z.

Всѣ подземныя выработки въ рудникѣ можно отнести къ двумъ группамъ, которыя въ сущности охватываютъ почти все разнообразіе рудничныхъ галлерей, одна группа—выработки идущіе по паденію пласта (или вкрестъ его въ пустой породѣ), а другая группа выработки идущіе по простиранію пласта; направленія выработокъ этихъ группъ пересѣкаются другъ съ другомъ подъ углами, примѣрно равными прямому.

Такимъ образомъ полигоны, съ которыми встрѣчаемся въ практикѣ, не представляютъ по своей формѣ полного отсутствія закономерности, наоборотъ эта закономерность есть и заключается въ присутствіи болѣе или менѣе значительныхъ прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся примѣрно подъ прямыми углами. Къ разсмотрѣнію накопленія погрѣшностей въ такихъ полигонахъ мы и перейдемъ.

При этомъ будемъ предполагать, что координатныя оси выбраны такимъ образомъ, что ось абсциссъ идетъ примѣрно по линіи паденія пласта, а ось ординатъ примѣрно по линіи простиранія пласта.

Будемъ искать погрѣшность, накопившуюся въ какомъ-нибудь пунктѣ полигона относительно его начальной точки, т. е. считая пока положеніе начальной точки опредѣленнымъ съ точностью превышающей таковую другихъ нолігонныхъ нунктовъ и точно также будемъ пока считать свободнымъ отъ погрѣшности направленіе линіи, отъ которой исходить полигонъ.

Погрѣшность, накопившуюся отъ неправильности измѣренія длинъ для полигоновъ разсматриваемаго вида, легко найти, если установитъ законъ накопленія погрѣшностей для одного стана.

Принято считать, что δ_s средняя погрѣшность измѣренія длины s одного стана складывается изъ трехъ видовъ погрѣшностей, изъ которыхъ одна не зависитъ отъ длины стана, другая пропорціональна \sqrt{s} изъ длины, а третья пропорціональна самой длинѣ.

$$\text{Другими словами } \delta S^2 = a^2 + b^2s + c^2s^2$$

Для полигона какого угодно вида справедливо положеніе: Погрѣшность точки перпендикулярно (или параллельно) заданному направленію равна квадратичной суммѣ прожекцій погрѣшностей измѣренія каждаго отдѣльнаго стана на направленіе \perp (или \parallel) заданному. Для вытянутого полигона имѣющаго n становъ примѣрно одинаковой длины, погрѣшность ΔS послѣдняго пункта вдоль длины полигона. можетъ быть представлена въ такомъ видѣ:

$$(\Delta S)^2 = na^2 + b^2L + c^2\sum s^2 = na^2 + b^2L + c^2Ls \quad \text{ибо} \\ \sum s^2 = ns^2 = Ls.$$

Для полигона разсматриваемой формы погрѣшность абсциссы ΔX_s конечной точки, зависящая отъ измѣренія длинъ, будетъ изъ себя представлять геометрическую сумму погрѣшностей ¹⁾ вдоль вытянутыхъ полигоновъ, идущихъ по паденію или возстанію пласта (однимъ словомъ вкрестъ простирания), полигоны же идущіе по простиранию пласта на ΔX_s влияния не окажутъ. Для погрѣшности ΔY_s подобно предыдущему надо взять квадратичную сумму погрѣшностей вдоль полигоновъ идущихъ по простиранию и оставить безъ вниманія полигоны идущіе вкрестъ простирания.

Такимъ образомъ получимъ

$$\Delta X_s^2 = na^2 + b^2L_1 + c^2\sum_1 s^2 \\ \Delta Y_s^2 = ma^2 + b^2L_2 + c^2\sum_2 s^2$$

Здѣсь n общее число становъ во всѣхъ полигонахъ идущихъ вкрестъ простирания пласта, L_1 общая ихъ длина, $\sum_1 s^2$ сумма квадратовъ длинъ всѣхъ становъ.

m , L_2 и $\sum_2 s^2$ аналогичныя значенія для полигоновъ по простиранию. Сложивъ эти два равенства получимъ погрѣшность положенія точки M_s .

$$M_s^2 = Na^2 + b^2L + c^2\sum s^2$$

N —общее число становъ во всемъ полигонѣ, L его полная длина, $\sum s^2$ суммa квадратовъ длинъ всѣхъ становъ.

Если s длина стана примѣрно одинакова для всего полигона, то M_s получить такой видъ.

$$M_s^2 = Na^2 + b^2L + c^2Ls$$

¹⁾ Для конечныхъ пунктовъ

Выраженіе M_s не отличается отъ аналогичнаго выраженія для вытянутого полигона.

Погрѣшность вдоль какого нибудь направленія составляющаго уголъ ϑ съ осью x выразится въ зависимости отъ погрѣшностей ΔX_s и ΔY_s .

$$M_{s\vartheta}^2 = \Delta X_s^2 \cdot \cos^2\vartheta + \Delta Y_s^2 \sin^2\vartheta$$

Другими словами $M_{s\vartheta}$ будетъ поудіаметромъ эллипса, параллельнымъ заданному направленію, если главныя полуоси будутъ ΔX_s и ΔY_s соответственно расположенныя.

Обратимся теперь къ разсмотрѣнію закона накопленія погрѣшностей отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ теодолитомъ.

Для простоты разсмотрѣнія сдѣлаемъ рядъ допущеній:

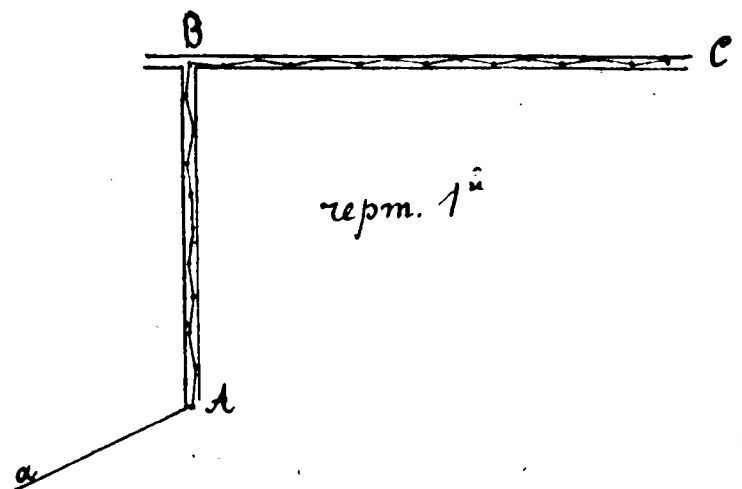
1) Sin угловъ простирания въ полигонахъ, идущихъ вкрестъ простирания пласта положимъ $= 0$, а $\cos = 1$.

2) Sin угловъ простирания въ полигонахъ, идущихъ по простиранию пласта положимъ $= 1$, а $\cos = 0$.

3) Длины становъ предположимъ примѣрно равными между собой.

Первыя два допущенія при извѣстномъ выборѣ осей координатъ мы можемъ считать близкими къ дѣйствительности. Вліяніе же послѣдняго допущенія можно будетъ учесть послѣ того, какъ выводы при этомъ допущеніи будутъ сдѣланы. Принявъ допущеніе третье можно, такъ сказать, оставить открытымъ вопросъ о зависимости точности измѣренія угловъ отъ длинъ становъ, такъ какъ при равной длинѣ становъ эта зависимость будетъ одинакова.

Предположимъ, что полигонъ имѣетъ форму ABC , т. е. состоитъ изъ двухъ прямолинейныхъ частей AB и BC пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.



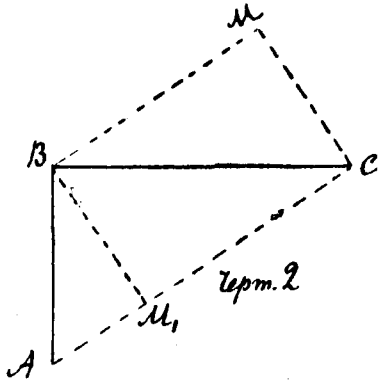
Въ части АВ пусть n_1 становъ, въ части ВС n_2 становъ, длина стана = S.

Съемка идетъ отъ точки А; предполагая координаты точки А свободными отъ погрѣшности, также какъ и направленіе линіи аА, найдемъ погрѣшность вдоль линіи АС (или все равно погрѣшность длины линіи АС) и погрѣшность \perp направленію АС.

Для всякаго полигона погрѣшность вдоль какого-либо направленія будетъ равна аналогичной погрѣшности вытянутого полигона, вершины котораго суть проэкции вершинъ даннаго на направленіе, перпендикулярное данному и проходящее, на примѣръ, черезъ ту точку полигона, погрѣшность для которой ищется.

Примѣняя это правило, найдемъ всѣ искомыя погрѣшности, назвавъ ихъ соответственно dR , dR_l , и dR_{\perp} .

Для нахождения dR надо найти сначала M_x и M_y , ибо $dR^2 = M_x^2 + M_y^2$.



Назовемъ среднюю погрѣшность измѣренія угла теодолитомъ $d\alpha$.

Погрѣшность M_x равна соответственной погрѣшности для точки В полигона АВ, для котораго приложима формула Гордана, слѣдовательно $M_x^2 =$

$$= \frac{n_1^3 s^2}{3} d\alpha^2.$$

Ошибка M_y получится изъ полигона ВС, въ которомъ мы въ точку В должны вообразить спроектированными n_2 вершинъ полигона АВ, отсюда получимъ.

$$M_y^2 = \left(n_2 n_1^2 s^2 + \frac{n_2^3 s^2}{3} \right) d\alpha^2,$$

$$\text{отсюда } dR^2 = s^2 d\alpha^2 \left(\frac{n_1^3}{3} + \frac{n_2^3}{3} + n_1 n_2 \right)$$

¹⁾ Здѣсь dR есть погрѣшность положенія точки, dR_l погрѣшность вдоль, dR_{\perp} погрѣшность \perp линіи АС.

Ошибка вдоль линіи АС равна геометрической суммѣ аналогичныхъ ошибокъ полигоновъ, представляющихъ проэкции данныхъ на направленіи МС, перпендикулярное АС. Для обонхъ этихъ полигоновъ приложима формула Гордана, отсюда и получается выраженіе для dR_l .

$$dR_l^2 = d\alpha^2 \left[\frac{n_1^3 s_1^2}{3} + \frac{n_2^3 s_2^2}{3} \right]$$

$$\text{здѣсь } s_1 = \frac{n_1 s}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \text{ и } s_2 = \frac{n_2 s}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

подставивъ, получимъ:

$$\begin{aligned} dR_l^2 &= \frac{s^2 d\alpha^2}{3(n_1^2 + n_2^2)} \cdot (n_1^3 n_2^2 + n_2^3 n_1^2) = \\ &= \frac{n_1^2 n_2^2 s^2}{3(n_1^2 + n_2^2)} d\alpha^2 (n_1 + n_2) \end{aligned}$$

Ошибка \perp направленію АС есть геометрическая сумма соответственныхъ ошибокъ полигоновъ AM_1 и M_1C полученныхъ какъ проэкции полигоновъ АВ и АС.

Ошибка для полигона M_1C находится просто и равна $= d\alpha \sqrt{\frac{n_2^3 s_1^2}{3}}$ гдѣ s_1 имѣеть указанное выше значеніе.

Для нахождения же ошибки полигона AM_1 (въ точкѣ С), мы замѣтимъ, что для любой прямолинейной части полигона, входящей въ комбинацію формы полигона произвольнаго вида, при условіи болѣе или менѣе значительнаго числа становъ въ этой части, справедливо слѣдующее выраженіе ¹⁾.

$$dr^2 = d\alpha^2 \left[\frac{n^3 s^2}{3} + n^2 s d + n(p^2 + d^2) \right]$$

Здѣсь dr есть та погрѣшность для конечной точки всего полигона, которая является какъ слѣдствие неправильности измѣренія угловъ въ прямолинейной части полигона, n число становъ, s длина стана, p длина перпендикуляра опущеннаго изъ конечной точки полигона на направленіе прямолинейной части, d разстояніе отъ основанія вышеупомянутаго перпендикуляра до ближайшей вершины полигонаго угла (прямолинейной части).

Для нашего случая $p = 0$, $d = n_2 s_1$, $n = n_1$

¹⁾ Еще условіе справедливости этого выраженія заключается въ томъ, чтобы прямолинейная часть не лежала по обѣимъ сторонамъ перпендикуляра опущеннаго на нее изъ конечной точки полигона.

и $s = s_2$ гдѣ s_1 и s_2 имѣютъ указанныя выше значенія такимъ образомъ, мы можемъ написать, что

$$dR_{\tau}^2 = dx^2 \left[\frac{n_1^3 s_2^2}{3} + n_1 n_2^2 s_1^2 + n_1^2 n_2 s_1 s_2 + \frac{n_2^3 s_1^2}{3} \right]$$

Если замѣнить s_1 и s_2 ихъ значеніями, то получимъ:

$$dR_{\tau}^2 = \frac{s^2 dx^2}{n_1^2 + n_2^2} \left(\frac{n_1^5}{3} + \frac{n_2^5}{3} + n_1 n_2^4 + n_2^2 \cdot n_1^3 \right)$$

Полученныя выраженія для dR , dR_e и dR_{τ} представимъ какъ функціи слѣдующихъ величинъ.

1) Общаго числа стаяновъ всего полигона $n_1 + n_2 = N$.

2) Длины линіи $AC = l = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \cdot s$

3) Отношенія $Z = \frac{AB}{BC} = \frac{n_1}{n_2}$.

Послѣ нужныхъ преобразованій получимъ:

$$(dR)^2 = dx^2 \frac{l^2 N}{3} \varphi_1^2(Z)$$

$$(dR_l)^2 = dx^2 \cdot \frac{l^2 N}{3} \varphi_2^2(Z)$$

$$(dR_{\tau})^2 = dx^2 \frac{l^2 N}{3} \varphi_3^2(Z)$$

гдѣ функціи φ_1 , φ_2 и φ_3 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\varphi_1(Z) = \sqrt{\frac{1+3Z+Z^3}{(Z^2+1)(Z+1)}}$$

$$\varphi_2(Z) = \frac{Z}{Z^2+1}$$

$$\varphi_3(Z) = \sqrt{\frac{1+3Z(Z^2+1)+Z^5}{(Z^2+1)(Z+1)}}$$

Разсмотримъ отношеніе $\frac{dR}{dR_{\tau}}$, т. е. отношеніе ошибки положенія точки къ поперечной ошибкѣ, величина этого отношенія $= \frac{\varphi_1(Z)}{\varphi_3(Z)} = \sqrt{\frac{(1+3Z+Z^3)(Z^2+1)}{1+3Z(Z^2+1)+Z^5}}$

При положительномъ Z (а Z отрицательнымъ быть и не можетъ) отношеніе $\frac{\varphi_1(Z)}{\varphi_3(Z)}$ всегда больше 1 и его минимальное значеніе = 1 при $Z = 0$ и при $Z = \infty$.

Разысканіе максимум'а этого выраженія приводитъ къ рѣшенію уравненія $2Z^6 + 3Z^5 + 3Z^3 - 6Z^2 - 6Z - 2 = 0$.

Это уравненіе какъ то не трудно доказать имѣетъ всего одинъ положительный корень, ирраціональный, заключенный между $Z = 1,19$ и $Z = 1,18$.

Значеніе $\frac{dR}{dR_{\tau}}$ для $Z = 1,19$ получается слѣдующее

$$\max \frac{dR}{dR_{\tau}} = 1,13.$$

Слѣдующая таблица даетъ значенія для $\frac{dR}{dR_{\tau}}$ при различныхъ значеніяхъ Z . Значенія $\frac{dR}{dR_{\tau}}$ вычислены съ точностью до 0,01.

Z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	4	5	10	∞	8
$\frac{dR}{dR_{\tau}}$	1	1,00	1,01	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,10	1,11	1,12	1,12	1,09	1,05	1,03	1,02	1,005	1	1,01

Отсюда мы можемъ заключить, что поперечная ошибка всегда остается приблизительно равной ошибкѣ положенія и шахішн'а отклоненія dR отъ dR_{τ} достигаетъ всего 13% dR_{τ} .

Замѣтимъ, что максимальное значеніе $\frac{dR}{dR_{\tau}}$ достигается не при $Z = 1$, когда форма полигона наиболѣе удаляется отъ вытянутой. Явленіе это можно себѣ объяснить тѣмъ, что вліянія погрѢшностей различныхъ угловъ полигона на конечныя ошибки не симметричны положенію вершины угла относительно точки В.

Разсмотримъ теперь значеніе выраженія $\varphi_1(Z)$. Разысканіе максимум'а и минимум'а этого выраженія приводитъ къ рѣшенію уравненія $Z^4 - 4Z^3 - 3Z^2 - 2Z + 2 = 0$. Это уравненіе имѣетъ два положительныхъ корня, изъ которыхъ одинъ равенъ 4,7, а второй заключенъ между 0,47 и 0,48.

Предѣльное значеніе $\varphi_1(Z)$ отсюда получается:

$$\varphi_1(Z = 4,7) = 0,95$$

$$\varphi_1(Z = 0,47) = 1,19: (1,186).$$

Значенія $\varphi_1(Z)$ при измѣненіи Z отъ 0 до ∞ даны въ слѣдующей таблицѣ:

Z =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞	1,5
φ ₁ (Z) =	1	1,08	1,13	1,17	1,18	1,18	1,18	1,17	1,15	1,13	1,12	1	0,96	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96	0,96	0,96	1	1,05

Если следовательно мы будемъ опредѣлять погрѣшность dR прямо по формулѣ

$$dR = dz \cdot L \sqrt{\frac{N}{3}}$$

то мы опредѣляли бы dR съ точностью во всякомъ случаѣ до 17% опредѣляемой величины.

Если же для вычисления dR мы будемъ примѣнять выраженіе

$$dR = K \cdot dz \cdot L \sqrt{\frac{N}{3}}$$

гдѣ k будемъ считать равнымъ 1,15 для всѣхъ значеній Z отъ 0,1 до Z=1,3 и k=1 для всѣхъ другихъ значеній Z, что dk опредѣляется во всѣхъ случаяхъ съ точностью не ниже 7% опредѣляемой величины.

Функция φ₃(Z) обладаетъ также тѣмъ свойствомъ, что при всевозможныхъ значеніяхъ Z величина самой функціи мало отклоняется отъ 1.

Вотъ значенія въ φ₃(Z) при измѣненіи Z отъ 0 до ∞

Z =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
φ ₃ (Z) =	1	1,08	1,12	1,13	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02	1	0,94	0,92	0,91	0,92	0,93	0,94	0,945	0,95	0,955	0,96	1

Изъ этой таблицы видно, что опредѣляя dRτ по формулѣ $dR\tau = dz \cdot L \sqrt{\frac{N}{3}}$ мы делаемъ ошибку не болѣе 12% опредѣляемой величины.

Если же опять введемъ коэффициентъ k, полагая

$$dR\tau = k dz \cdot L \sqrt{\frac{N}{3}}$$

причемъ k положимъ равнымъ 1,1 для всѣхъ значеній Z отъ 0,1 до 0,7, k=0,95 для всѣхъ Z отъ 1,5 до 10 и k=1 для другихъ значеній, то для всѣхъ случаевъ мы опредѣлимъ dRτ съ точностью не ниже 5% искомой величины, а въ большинствѣ случаевъ съ точностью не ниже 2—3% искомой величины.

Если же dRτ или dR желательно знать съ болѣеюй точностью, то можно прибѣгнуть къ помощи составленныхъ выше таблицъ.

Функция φ₂(Z) получаетъ свое наибольшее значеніе = 0,5 при Z=1:

Такимъ образомъ продольная ошибка, причиняемая погрѣшностями измѣренія угловъ даже при своемъ максимальномъ значеніи значительно меньше ошибки поперечной.

Собственно говоря, максимальное значеніе отношенія $\frac{dRl}{dR\tau}$ будетъ не при Z=1, а при дальнѣйшемъ возрастаніи Z, и при этомъ возрастаніи φ₂(Z) уменьшается медленнѣе, чѣмъ φ₃(Z). Разысканіе максимума выраженія $\frac{dRl}{dR\tau}$ приводитъ къ рѣшенію уравненію $2Z^6 + 3Z^5 + 3Z^3 - 6Z^2 - 6Z - 2 = 0$, къ которому мы пришли ранѣе, разыскивая максимумъ выраженія $\frac{dR}{dR\tau}$; этотъ результатъ, т. е. что $\frac{dR}{dR\tau}$ и $\frac{dRl}{dR\tau}$ имѣютъ максимумъ одновременно, можно было предвидѣть и заранѣе. Maximum $\frac{dRl}{dR\tau}$ будетъ следовательно при значеніи Z заключенномъ между 1,19 и 1,18.

$$\max \frac{dRl}{dR\tau} (\text{при } Z=1,19) = 0,492$$

Следовательно продольная ошибка никогда не достигаетъ половины dRτ.

Слѣдующая таблица даетъ какъ отношеніе $\frac{dRl}{dR\tau}$ такъ и само значеніе φ₂(Z) при различныхъ значеніяхъ Z.

Z =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
φ ₃ (Z) =	0	0,10	0,19	0,27	0,345	0,4	0,44	0,47	0,49	0,5	0,5	0,46	0,40	0,30	0,24	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0
$\frac{dR_0}{dR_T}$	0	0,09	0,17	0,24	0,31	0,36	0,40	0,44	0,47	0,49	0,5	0,48	0,44	0,33	0,255	0,21	0,17	0,15	0,13	0,115	0,10	0

Продольная погрѣшность, накопившаяся вѣлѣдствіе неирравильнаго измѣренія угловъ, мала по отношенію къ dR_T, рассмотримъ, въ какомъ отношеніи она стоитъ къ продольной погрѣшности, накопившейся отъ неирравильности измѣренія длинъ становъ. Найдемъ условіе, при которомъ эти двѣ погрѣшности становятся равными другъ другу, при значеніи Z положимъ = 1. Продольная погрѣшность, накопившаяся отъ угловъ, будетъ въ этомъ случаѣ $= \frac{0,5}{\sqrt{3}} \cdot dx \cdot L \cdot \sqrt{N}$.

Продольная погрѣшность, накопившаяся отъ длинъ найдется по формулѣ:

$$M_{\delta}^2 = \Delta \delta_s^2 \cos^2 \delta + \Delta \delta'_s^2 \sin^2 \delta$$

если положимъ $\cos^2 \delta = 0,5$ и $\sin^2 \delta = 0,5$.

Взявъ выраженія для $\Delta \delta_s$ и $\Delta \delta'_s$ со стр. 2 и выразивъ входящія въ нихъ величины черезъ L и N, имѣющія тѣ же значенія, что и для dRl, получимъ:

$$M_{\delta}^2 = 0,5 \left[(Na^2 + b^2 L \sqrt{2} + \sqrt{2} c^2 \frac{L^2}{N}) \right]$$

Возьмемъ значенія a, b, c и dx по Anweisung IX, т. е. положимъ

$$a = 0 \quad b^2 = 0,0001 \quad c^2 = 1,25 \cdot 10^{-7} \quad dx = 1,5 \cdot 10^{-4}$$

Искомое условіе равенства M_δ² и dRl мы можемъ теперь написать въ такомъ видѣ.

$$\frac{0,25}{3} \cdot 225 \cdot 10^{-8} L^2 N = 0,5 L \sqrt{2} \left(10^4 + 1,25 \cdot 10^{-7} \frac{L}{N} \right)$$

Или такъ:

$$0,0375 LN = 1,424 \left(10^3 + \frac{1,25L}{N} \right)$$

Обычно среднѣе значеніе $\frac{L}{N}$ не выше 50m, поэтому пренебрегая членомъ $\frac{1,25L}{N}$ по сравненію съ 10³, можемъ написать наше равенство такъ:

$$LN = 38000$$

Положимъ $\frac{L}{N} = 40$ metr., найдемъ L² = 40.38000

и L = 1200 metr. Полигоны такихъ размѣровъ очень часты въ рудничной практикѣ, но все-таки ихъ размѣры надо считать значительными для обычной рудничной съемки. Поэтому можно думать, что для средняго размѣра полигона (при длинѣ AC метр. въ 200) ошибка dRl остается замѣтно менѣ ошибки M_δ², и оставаясь менѣ M_δ² можетъ весьма варьировать въ своей величинѣ въ зависимости отъ формы полигона.

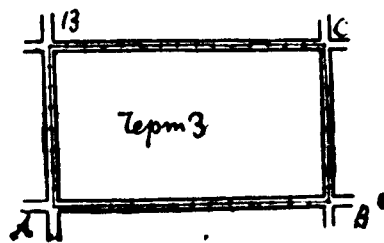
Если въ выраженіи для φ₃²(Z) замѣнить Z черезъ $\frac{1}{Z}$ и составить разность между прежнимъ выраженіемъ для Z и вновь полученнымъ, то числитель этой разности будетъ = 3Z(1 - Z), а знаменателемъ будетъ служить выраженіе, не содержащее знака—и слѣдовательно положительное при всякомъ положительномъ значеніи Z.

Для всякаго Z < 1, слѣдовательно, разность будетъ положительна и для всякаго Z > 1 отрицательна.

Аналогичнымъ образомъ можно составить разность φ₃²(Z) и φ₃²($\frac{1}{Z}$) и найти, что ея числитель будетъ = 3Z²(1 - Z), а знаменатель опять выраженіе положительное при всякомъ положительномъ Z.

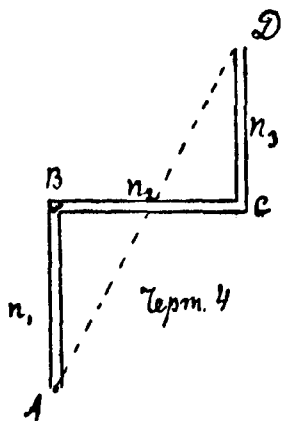
Слѣдовательно и новая разность будетъ положительна при всякомъ Z < 1.

А отсюда слѣдуетъ, что ошибка положенія точки и поперечная ошибка будутъ болѣе у того полигона, у котораго короткое крыло предшествуетъ длинному т. е. что ошибки будутъ болѣе у полигона вида ABC, чѣмъ у полигона вида A'B'C' (разумѣется при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ).



Форма $\overset{B}{A} \text{---} C$ полигона представляет первую степень усложнения формы рудничныхъ полгоновъ, начиная отъ простаго вытянутого и идя къ тѣмъ формамъ, которыя даетъ намъ практика.

Какъ вторую степень усложнения мы можемъ рассмотреть полигоны вида $\overset{D}{B} \text{---} C$, т. е. состоящие изъ трехъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямыми углами.



Въ части АВ — n_1 становъ, въ ВС — n_2 и CD — n_3 становъ примѣрно одинаковой длины.

Такимъ же образомъ, какъ выше можно найти выраженія для ошибокъ dR , dRl и $dR\tau$.

Выражая ихъ въ зависимости отъ $AD=L$ — расстоянія между начальной и конечной точками полигона, $N = n_1 + n_2 + n_3$ общаго числа становъ, $Z = \frac{n_1 + n_3}{n_2}$ и $Z_1 = \frac{n_3}{n_2}$ получимъ:

$$dR = Ld\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_1(Z, Z_1)$$

$$dRe = Ld\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_2(Z, Z_1).$$

$$dR\tau = Ld\alpha \sqrt{\frac{N}{3}} \psi_3(Z, Z_1).$$

Здѣсь ψ_1 ; ψ_2 и ψ_3 имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\psi_1^2 = \frac{1 + 3Z + Z^3 + 3(Z_1^2 - Z_1)}{(Z^2 + 1)(Z + 1)} = \varphi_1^2(Z) + \frac{3(Z_1^2 - Z_1)}{(Z^2 + 1)(Z + 1)}$$

$$\psi_2^2 = \frac{Z^2 + 3(Z_1^2 - ZZ_1)}{(1 + Z^2)^2} = \varphi_2^2(Z) + 3 \frac{Z_1^2 - ZZ_1}{(1 + Z^2)^2}$$

$$\psi_3^2 = \frac{1 + Z^3 + 3Z(1 + Z^2) + 3(Z - 1)(Z_1^2 Z + Z_1)}{(1 + Z)(1 + Z^2)^2} =$$

$$= \varphi_3^2(Z) + 3 \frac{(Z - 1)(Z_1^2 Z + Z_1)}{(1 + Z)(1 + Z^2)^2}$$

Здѣсь φ_1 ; φ_2 и φ_3 уже извѣстны намъ изъ предыдущаго формулы.

Рассмотримъ сначала $\psi_1(Z, Z_1)$.

При всякомъ заданномъ Z выраженіе ψ_1 получаетъ свой maximum и minimum въ зависимости отъ Z_1 и притомъ одновременно съ выраженіемъ

$$Z_1^2 - Z_1$$

Максимальное значеніе Z_1 равно Z , минимальное = 0. Если $Z < 1$, то $Z_1 < 1$.

Слѣдов., если $Z < 1$, то максимальное значеніе выраженія $Z_1^2 - Z_1$ будетъ при $Z_1 = 0$, а минимальное при $Z_1 = \frac{1}{2}$.

Отсюда при $Z < 1$, maximum выраженія $\psi_1^2(Z, Z_1)$ будетъ равенъ $= \varphi_1^2(Z) = \frac{1 + 3Z + Z^3}{(1 + Z)(1 + Z^2)}$

$$\text{minimum } \psi_1^2(Z, Z_1) = \frac{\frac{1}{4} + 3Z + Z^3}{(Z^2 + 1)(Z + 1)} \text{ для } Z \text{ между } 1 \text{ и } 0,5.$$

$$\text{minimum } \psi_1^2(Z, Z_1) = \frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(Z^2 + 1)(Z + 1)} \text{ для } Z \text{ между } 0,5 \text{ и } 0.$$

Для $Z > 1$ maximum $Z_1^2 - Z_1$ будетъ при maximum Z , — т. е. при $Z_1 = Z$.

$$\text{Отсюда max. } \psi_1^2(Z, Z_1) = \frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(Z^2 + 1)(Z + 1)}.$$

Минимальное же значеніе будетъ при $Z_1 = \frac{1}{2}$,

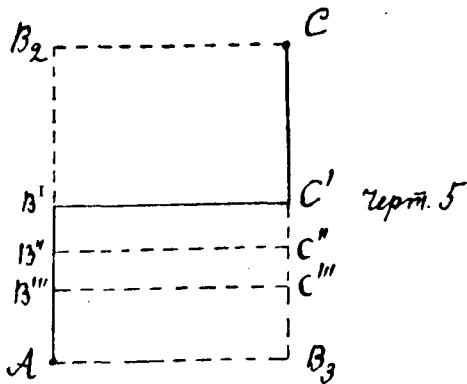
$$\text{Слѣдов. для } Z > 1 \text{ minimum } \psi_1^2(Z, Z_1) = \frac{\frac{1}{4} + 3Z + Z^3}{(1 + Z)(1 + Z^2)}$$

$$\text{Замѣтимъ, что выраженіе } \frac{1 + 3Z^2 + Z^3}{(1 + Z)(1 + Z^2)} = \varphi_1^2\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Все сказанное сейчасъ о maximum'ѣ $\psi(Z, Z_1)$ можно представить нагляднѣе такъ:

Maximum ошибки dR для полигона состоящаго изъ трехъ прямолинейныхъ частей пересѣкающихся подъ прямыми углами будетъ для той его формы, когда онъ обращается въ полигонъ болѣе простаго вида, т. е. состоящій всего изъ двухъ прямолинейныхъ частей и притомъ въ такой, въ которомъ съемка

по короткой части предшествуетъ съемкѣ по длинной.



Напримѣръ максимум ошибки dR для полигоновъ AB_1C ; AB_2C ; AB_3C ; AB_1C' ; AB_2C' ; AB_3C' ; AB_1C'' ; AB_2C'' ; AB_3C'' ; AB_1C''' ; AB_2C''' ; AB_3C''' ; будетъ ошибка dR поли-

гона AB_2C если $AB_2 < B_2C$ или полигона AB_3C , если $AB_3 < B_3C$.

Разсмотримъ теперь минимум той же ошибки dR при различныхъ значеніяхъ Z и при различныхъ измѣреніяхъ Z_1 . Для Z между 0 и 0,5 минимум $\psi_1(Z, Z_1)$ будетъ равенъ значенію функціи $\varphi_1(Z)$, если придавать Z значенія отъ $\frac{1}{0}$ до $\frac{1}{0,5}$. При всѣхъ значеніяхъ Z отъ 0,5 до ∞ минимум $\psi_1(Z, Z_1)$ равенъ, какъ это видно изъ предыдущаго

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{4} + 3Z + Z^2}{(Z^2 + 1)(1 + Z)}}$$

Слѣдующая таблица даетъ значенія минимума $\psi_1(Z, Z_1)$ для различныхъ значеній Z , причемъ значенія этого минимума для Z отъ 0 до 0,5 получены изъ табл. 1 стр. 5, а для другихъ значеній вычислены по только что приведенной выше формулѣ:

Z =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
minim. $\psi_1(Z, Z_1)$	1	0,96	0,95	0,96	0,97	1	1,02	1,03	1,035	1,035	1,03	1,03	1,02	1,01	1,01	1,0	0,98	0,95	0,95	0,95	0,95	0,96	0,96	0,96	0,96	1
max. $\psi_1(Z, Z_1)$	1	1,08	1,13	1,17	1,18	1,18	1,18	1,17	1,15	1,13	1,2	1,13	1,15	1,16	1,16	1,17	1,18	1,17	1,15	1,135	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1

Значенія максимум $\psi_1(Z, Z_1)$, вычислены по формулѣ $\varphi_1(Z)$, т. е. взяты изъ таблицы со стр. 5 отъ 0 до 1, а отъ 1 до ∞ изъ второй половины той же таблицы.

Эта таблица даетъ намъ возможность зная Z , т. е. отношеніе длины галлерей идущихъ вкрестъ простиранія пласта къ длинѣ галлерей идущихъ по простиранію пласта назначить для dR предѣлы, между которыми она заключается каково бы соотношеніе между длинами AB и CD ни было.

Какой бы полигонъ вида намъ ни былъ

данъ, можемъ вычислить dR по формулѣ:

$$dR = k \cdot dx \cdot l \sqrt{\frac{N}{3}}$$

причемъ придавъ k среднее изъ минимальнаго и максимальнаго данныхъ выше для каждаго Z въ

таблицѣ значеній, мы найдемъ dR съ точностью не меньшей чѣмъ до 10% опредѣляемой величины.

Если же вычислимъ dR просто по формулѣ Гордана

$$dR = dx \cdot l \sqrt{\frac{N}{3}}$$

то можемъ сдѣлать погрѣшность въ опредѣленіи dR или -19% или $+5\%$ отъ найденнаго значенія.

Обратимся теперь къ ошибкѣ dR_3 и рассмотримъ значенія функціи $\psi_3(Z, Z_1)$.

При данномъ Z эта функція достигаетъ максимума и минимума одновременно съ выраженіемъ $3(Z - 1) \cdot (Z_1^2 Z + Z_1)$.

Тутъ опять могутъ быть случаи $Z > 1$ и $Z < 1$.

При $Z > 1$ данное выраженіе > 0 и максимум его будетъ при Z_1 максимум, т. е. $Z_1 = Z$.

Тогда $3(Z - 1) \cdot (Z_1^2 Z + Z_1) = 3Z(Z - 1)(Z^2 + 1)$

ψ_3 принимаетъ видъ:

$$\psi_3^2 = \frac{Z^2 + Z^2(1 + Z^2) + 1}{(Z^2 + 1)^2(Z + 1)}$$

Не трудно видѣть, что полученное $\psi_3 = \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ см. стр. 4, т. е. при измѣненіи Z отъ 1 до ∞ максимум $\psi_3(Z, Z_1)$ равенъ значенію $\varphi_3(Z)$ при измѣненіи Z отъ 1 до 0.

При $Z < 1$ выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)$ будетъ отрицательно и его максимум = 0 при $Z_1 = 0$.

Тогда $\psi_B(Z, Z_1) = \varphi_3(Z)$.

Такимъ образомъ максимумъ ошибки dR_τ при измѣненіи отношенія Z , и при заданномъ Z равенъ ошибкѣ dR_τ такого полигона состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, въ который данный, состоящій изъ трехъ частей въ предѣлѣ обращается, причемъ изъ двухъ полигоновъ, служащихъ предѣломъ для даннаго, надо выбрать такой, для котораго короткая часть предшествуетъ длинной.

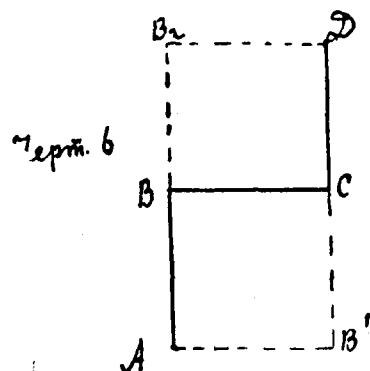
Найдемъ теперь minimum $\psi_3^2(Z, Z_1)$ при заданномъ значеніи Z .

Если $Z > 1$, выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1)$ будетъ положительно, слѣдовательно, его minimum = 0, что будетъ при $Z_1 = 0$, а тогда функція $\psi_3(Z, Z_1)$ будетъ равна ранѣе разсмотрѣнной функціи $\varphi_3(Z)$.

Если $Z < 1$, выраженіе $3(Z-1)(Z_1^2 Z + Z_1) < 0$, его minimum будетъ при максимумъ значеніи Z_1 , т. е. при $Z_1 = Z$, а тогда $\psi_B(Z, Z_1) = \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$.

Сказанное объ ошибкѣ dR_τ можно нагляднѣе свести къ слѣдующему:

Какое бы ни было дано видоизмѣненіе полигона ABCD, ошибка dR_τ для него заключается между ошибками dR_τ полигоновъ AB_2D и AB_1D .



Если намъ дано значеніе Z , то ошибка dR_τ любого полигона ABCD заключается между

$$Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}} \cdot \varphi_3(Z) \text{ и } Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}} \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Значенія $\varphi_3(Z)$ для всевозможныхъ значеній Z вычислены уже на стр. 5.

Разность $\varphi_3(Z) - \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$ даетъ намъ для каждого Z предѣлъ измѣненія (въ доляхъ ошибки dR_τ вычисляемой по формулѣ Лордана) искомой dR_τ при измѣненіяхъ Z_1 отъ 0 до своего максимумъ Z .

Ниже мы помещаемъ таблицу, которая представляетъ изъ себя въ сущности приведенную уже на стр. 5, верхняя строка даетъ $\varphi_3(Z)$ при измѣненіи Z отъ 0 до ∞ , а расположенная подъ ней тоже $\varphi_3(Z)$, но при измѣненіи отъ ∞ до 0, нижняя строка ихъ разность.

Z =	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
1 $\varphi_3(Z)$	1	1,08	1,12	1,13	1,13	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02	1	0,94	0,92	0,91	0,92	0,93	0,94	0,945	0,95	0,955	0,16	1
2 $\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$	1	0,96	0,93	0,92	0,91	0,92	0,93	0,94	0,96	0,98	1	1,07	1,11	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,08	1
3 $\varphi_3(Z) - \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$	0	0,12	0,19	0,21	0,22	0,19	0,16	0,13	0,08	0,04	0	0,13	0,19	0,22	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,12	0,12	0

Изъ этой таблицы видно, что если мы вычислимъ dR_τ по формулѣ:

$$dR_\tau = k \cdot Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}$$

гдѣ k будемъ придавать среднее для каждаго Z изъ помещенныхъ въ 1-й и во 2-й стр. таблицы чиселъ то сдѣлаемъ при опредѣленіи dR_τ наибольшую погрѣшность $\pm 11\%$ отъ $dR_\tau = Ld\alpha\sqrt{\frac{N}{3}}$

и если вычислимъ dR просто по формулѣ 1ордана, то сдѣлаемъ погрѣшность самое большее — 13% или + 9% отъ найденной величины.

Разсмотримъ теперь ошибку dRl или значеніе выраженія ψ_2 .

Будемъ считать Z заданнымъ, найдемъ maximum и minimum ψ_2 при измѣненіи Z_1 .

Выраженіе $Z_1^2 - ZZ_1$, одновременно съ которымъ ψ_2 достигаетъ своего maximum и minimum всегда отрицательно, ибо $Z_1 < Z$, слѣдовательно его maximum = 0, что будетъ при $Z_1 = Z$ и при $Z_1 = 0$.

Отсюда слѣдуетъ:

1) dRl для полигона, состоящаго изъ трехъ прямолинейныхъ частей, всегда менѣе dRl полигона, состоящаго изъ двухъ и имѣющаго такое же значеніе Z (при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ условіяхъ).

2) Maximum dRl будетъ равенъ dRl полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей и представляющаго изъ себя предѣлъ измѣненія даннаго полигона.

Предшествуетъ ли въ этомъ случаѣ съемка по короткой части съемкѣ по длинной, не играетъ здѣсь роли, ибо

$$\varphi_2(Z) = \varphi_2\left(\frac{1}{Z}\right).$$

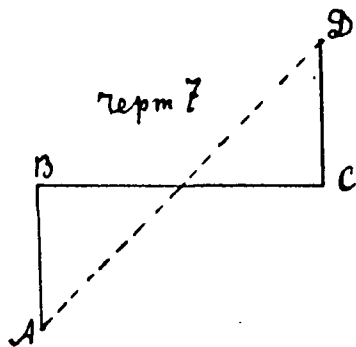
Минимальное значеніе ψ_2 (Z, Z_1) при заданномъ Z совпадаетъ съ максимальнымъ численнымъ значеніемъ выраженія $Z_1^2 - ZZ_1$, которое поступаетъ при $Z_1 = \frac{Z}{2}$.

$$(Z_1^2 - ZZ_1) \text{ при } Z_1 = \frac{Z}{2} \text{ равно } -\frac{Z^2}{4}.$$

Выраженіе ψ_2 приметъ при этомъ такой видъ:

$$\psi_2(ZZ_1) \text{ при } Z_1 = \frac{Z}{2} = \frac{1}{2} \frac{Z}{1+Z^2} = \frac{1}{2} \varphi_2(z).$$

Минимальное значеніе ψ_2 будетъ при такой формѣ полигона ABCD, при которой онъ наиболѣе



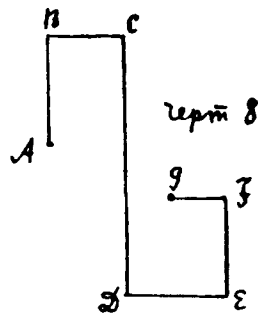
приближается къ вытянутому между точками A и D полигону. Линія AD дѣлитъ пополамъ BC, и точки B и C равно удалены отъ линіи AD.

Итакъ minimum dRl равенъ половинѣ maximum'a той же ошибки dRl при заданномъ Z и при всевозможныхъ измѣненіяхъ Z_1 .

По таблицѣ стр. 6, мы можемъ получить значеніе maximum dRl , а слѣдовательно отдать себѣ отчетъ о предѣлахъ, въ которыхъ колеблется dRl .

То, что сказано объ ошибкахъ dR , dRl и dRr можно обобщить и распространить на полигоны какого угодно вида, т. е. состоящіе изъ любого числа прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами.

При этомъ необходимо замѣтить, что мы будемъ разсматривать только такіе полигоны, въ которыхъ съемка идетъ все время удаляясь отъ начальнаго пункта.



Возможны конечно и такіе полигоны, какъ напримѣръ полигонъ вида ABCDFEg, также состоящій изъ прямолинейныхъ участковъ пересѣкающихся подъ прямыми углами.

Оставляя вопросъ о возможности какихъ-либо обобщеній для полигоновъ такого вида открытымъ, мы будемъ имѣть въ виду дальше только полигоны, въ которыхъ съемка все время идетъ, удаляясь отъ начальнаго пункта.

Мы имѣемъ въ виду показать, что какой бы ни былъ заданъ полигонъ, состоящій изъ произвольнаго числа участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами, легко дать себѣ понятіе о величинѣ погрѣшностей конечной его точки, т. е. имѣть эту величину съ достаточной точностью, чтобы отвѣтить на всѣ вопросы, которые могутъ быть предложены практикой на разрѣшеніе теоріи случайныхъ ошибокъ.

Для того, чтобы подойти къ рѣшенію вопроса объ ошибкахъ полигона съ любымъ (n) числомъ

прямолинейныхъ частей, необходимо рассмотретьъ еще одинъ вопросъ относительно полигона вида ABCD, состоящаго изъ 3-хъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.

Зададимся цѣлью найти выраженіе ошибки \perp нѣкоторому направленію, составляющему уголъ ϵ съ направлениемъ АВ (считая ϵ по часовой стрѣлкѣ, начиная отъ АВ).

Выраженіе это легко найти по указанному выше правилу, стоитъ лишь полигонъ ABCD спроектировать на направленіе АМ (данное—составляющее уголъ ϵ съ АВ) и вычислить ошибку для этого полигона.

Можно поступать и иначе. Замѣтимъ, что легко находятся ошибки \perp линіи АВ и линіи ВС, назовемъ первую изъ нихъ черезъ R_x , вторую R_y . Разъ найдены эти ошибки легко найти искомую \perp АМ.

Элементарными разсужденіями не трудно показать, что искомая ошибка, назовемъ ее R_ϵ , будетъ равна:

$$R_\epsilon^2 = |R_x|^2 + |R_y|^2 - dx^2 \cdot \sin 2\epsilon \cdot \sum_{i=1}^n \eta_i \xi_i$$

η_i и ξ_i суть проэкции на оси y и x разстояній отъ точки D до любого иолигоннаго пункта при условіи, что ось $Ox \parallel AB$ и $Oy \parallel BC$.

Для полигоновъ разсматриваемаго вида $\sum \eta_i \xi_i$ находится очень легко, ибо для всѣхъ точекъ на АВ всѣ η_i равны между собой и $= BC$, для всѣхъ точекъ на ВС всѣ ξ_i равны между собой и $= CD$, для всѣхъ точекъ на CD всѣ произведенія $\eta_i \xi_i = 0$.

$|R_x|$ и $|R_y|$ суть ироэкции R_x и R_y на направленіе \perp АМ . т. е.

$$|R_x| = R_x \cos \epsilon \text{ и } |R_y| = R_y \cdot \sin \epsilon.$$

Опуская промежуточные выкладки, дадимъ выраженіе R_ϵ^2 въ зависимости отъ L, N, Z, Z_1 и ϵ (всѣ обозначенія прежнія).

$$R_\epsilon^2 = \frac{NL^2}{3} \cdot dx^2 \cdot f(Z, Z_1, \epsilon).$$

Назовемъ для краткости $\cotg \epsilon$ черезъ t . Функции $f(Z, Z_1, \epsilon)$ имѣеть видъ:

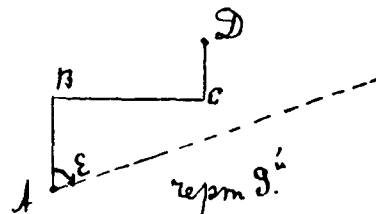
$$f(Z, Z_1, \epsilon) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1+3Z+3Z^2t+3(t-1)(Z_1^2t+Z_1)}{(1+Z^2)(1+Z)}$$

При измѣненіи Z_1 функция f имѣеть при заданномъ Z свой maximum и minimum одновременно съ выраженіемъ $3(t-1) \cdot (Z_1^2t+Z_1)$.

Если $t > 1$, то maximum этого выраженія при Z_1

maximum, т. е. $= Z$, и minimum при Z_1 , minimum $= 0$.

Если $t < 1$, то maximum этого выраженія при Z_1 , minimum, т. е. $= 0$, и minimum при Z_1 , maximum $= Z$.

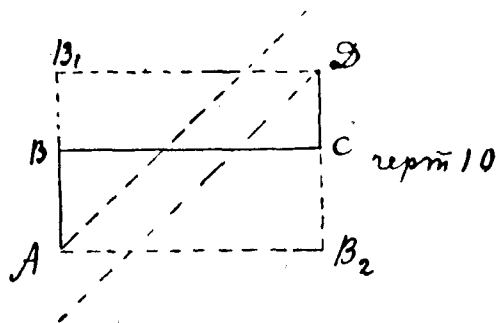


Это значить, что для всѣхъ направленій ¹⁾ отъ 0 до 45 maximum R_ϵ будетъ равенъ аналогичной ошибкѣ полигона AB_2D , а minimum аналогичной ошибкѣ полигона AB_1D .

Для всѣхъ направленій отъ 45° до 90°, наоборотъ, minimum будетъ равенъ ошибкѣ полигона AB_2D и maximum ошибкѣ полигона AB_1D .

Иначе это можно такъ сказать:

Если данъ полигонъ, состоящій изъ трехъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, и ищется погрѣшность R_ϵ , \perp направленію, составляющему уголъ ϵ съ направлениемъ первой его прямолинейной части, то искомая ошибка R_ϵ такого полигона будетъ менѣ аналогичной ошибки одного и болѣе ошибки другого полигоновъ, состоящихъ изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, и идущаго между тѣми же двумя точками (при одинаковой во всѣхъ случаяхъ длинѣ становъ). Изъ двухъ послѣднихъ полигоновъ R_ϵ будетъ у того больше, у котораго разстояніе точки перелома отъ линіи, проходящей черезъ начальную точку полигона \parallel заданному направленію, будетъ больше].



¹⁾ Для насъ интересно разсмотрѣть только ϵ между 0 и 90°.

Пусть теперь данъ полигонъ АВ, требуется найти ошибку \perp АВ. (см. ч. стр. 13).

Согласно теории случайныхъ ошибокъ, для того, чтобы найти среднюю погрѣшность отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ, достаточно розыскать среднюю погрѣшность, производимую неправильностью измѣренія каждого отдѣльнаго угла и взять геометрическую сумму найденныхъ средних погрѣшностей.

Поставимъ себѣ задачей найти не саму среднюю погрѣшность \perp АВ, но лишь предѣлы, между которыми она заключается.

Разсматривая часть МNРВ, видимъ согласно тому, что только сейчасъ рассмотрѣли, что отъ замѣны МNРВ полигономъ MN'В и MM'В искомая погрѣшность въ одномъ случаѣ уменьшится, а въ другомъ увеличится.

Слѣдовательно отъ полигона съ n частями мы перешли къ полигону, имѣющему $n - 1$ прямолинейную часть. Отъ этого такъ же перейдемъ къ имѣющему $n - 2$ части и т. д. пока не дойдемъ до имѣющаго всего двѣ части, который мы уже подробно рассмотрѣли.

Отсюда вытекаетъ такое правило:

Какой бы ни былъ заданъ полигонъ вида АВ, пусть Z будетъ отношеніе суммы числа становъ во всѣхъ частяхъ \parallel одному господствующему направленію къ суммѣ числа становъ \parallel другому господствующему направленію, средняя погрѣшность \perp линіи АВ будетъ заключаться между величинами:

$$da \cdot L \cdot \sqrt{\frac{N}{3}} \cdot \varphi_3(Z) \text{ и } dxL \sqrt{\frac{N}{3}} \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)$$

гдѣ N общее число становъ во всемъ полигонѣ, $L = АВ$, а функція φ_3 есть вышерассмотрѣнная функція, обладающая тѣмъ свойствомъ, что при всѣхъ своихъ измѣненіяхъ она ≈ 1 .

Слѣдовательно, полагая искомую ошибку $= dxL \sqrt{\frac{N}{3}}$ мы опредѣляемъ ее съ точностью въ громадномъ большинствѣ случаевъ большею, чѣмъ до 100%.

Разсмотримъ теперь среднюю погрѣшность положенія точки В полигона АВ.

Эту погрѣшность разобьемъ на 2 части.

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2$$

R_1 есть средняя погрѣшность положенія точки В зависящая отъ неправильности измѣренія угловъ

отъ А до точки М, R_2 есть средняя погрѣшность зависящая отъ съемки въ части МNРВ.

Возьмемъ полигонъ А...ММ'В, котораго съемка до точки М тождественна со съемкой предыдущаго полигона, но часть МNРВ замѣнена частью ММ'В.

Для этого полигона также напишемъ:

$$R'^2 = R_1'^2 + R_2'^2$$

Здѣсь R_1' погрѣшность точки В производимая ошибками угловъ съемки А...М, т. е. $R_1' = R_1$, а R_2' погрѣшность точки В, накопившаяся за съемку ММ'В.

Раньше было доказано, что $R_2' > R_2$, отсюда $R' > R$.

Отсюда вытекаетъ, что каково бы ни было число прямолинейныхъ частей полигона вида АВ и каково ни было соотношеніе между числами сторонъ въ различныхъ прямолинейныхъ частяхъ, ошибка положенія точки будетъ меньше, чѣмъ

$$dx \cdot L \sqrt{\frac{N}{3}} \varphi_3(Z)$$

гдѣ всѣ обозначенія прежнія, $Z < 1$.

Значенія $\varphi_3(Z)$ даны на стр. 5; при измѣненіи Z отъ 0 до 1, $\varphi_3(Z)$ измѣняется отъ 1 до 1,18 и до 1,12.

Что касается наименьшаго значенія R при любомъ заданномъ Z отношеніи числа становъ въ частяхъ, идущихъ \parallel одному, къ числу становъ въ частяхъ полигона идущихъ \parallel другому изъ двухъ господствующихъ въ полигонѣ направленій, то величина его приблизительно можетъ быть получена изъ того соображенія, что R всегда больше R_z , а минимальную величину R_z можно легко получить согласно предыдущему.

Обратимся теперь къ величинѣ погрѣшности dR_L .

Сначала рассмотримъ для полигона вида ABCD ошибку dR_ϵ для $\epsilon > 90^\circ$.

Величина погрѣшности dR_ϵ для ϵ отъ 90° до 180° имѣетъ такой же видъ, какъ и на стр. 11.

$$dR_\epsilon^2 = |R_x|^2 + |R_y|^2 - \sin 2\epsilon \sum_{i=1}^{i=N} r_i \xi_i$$

Всѣ обозначенія совершенно тождественны предыдущимъ, $\sin 2\epsilon$ — величина здѣсь отрицательная.

Выраженіе для R_ϵ имѣетъ такой же, какъ и прежде видъ, а именно:

$$dR_\epsilon^2 = \frac{NL^2}{3} d\alpha^2 \left[\frac{f(Z, t) + f(t, Z)}{(1 + Z^2)(1 + Z)(1 + Z^2)} \right]$$

Здѣсь $t = \cotg \epsilon$

$$f_1(t, Z_1) = 3(t-1)(Z_1^2 t + Z_1)$$

$dR\epsilon$ имѣетъ maximum и minimum при заданныхъ t и Z въ зависимости отъ измѣненія Z_1 одновременно съ maximum и minimum выраженія $3(t-1)(Z_1^2 t + Z_1)$.

Множитель $t-1$ отрицателенъ. При $Z > |tg \epsilon|$ все выраженіе отрицательно и его maximum будетъ при $Z_1 = 0$.

Если $Z > |tg \epsilon|$, все выраженіе будетъ положительно, его maximum при $Z_1 = Z$.

И въ томъ и другомъ случаѣ мы приходимъ къ полигону, состоящему изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ.

Отсюда слѣдуетъ:

Если данъ полигонъ, состоящій изъ трехъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямыми углами, и ищется погрѣшность $R\epsilon \perp$ направленію, составляющему уголъ ϵ съ направленіемъ первой его прямолинейной части, то искомая ошибка $R\epsilon$ будетъ меньше аналогичной ошибки полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямымъ угломъ, и именно того изъ двухъ его видовъ, у котораго точка перелома дальше отстоитъ отъ линіи, проходящей черезъ послѣднюю точку полигона \perp заданному направленію.

Отсюда нетрудно видѣть слѣдующее:

Данъ полигонъ вида $AMNPB$ (см. стр. 13). Найти наивысшій предѣлъ ошибки dRl при заданномъ общемъ числѣ становъ N , разстояніи AB и отношеніи Z .

Замѣнивъ часть $MNPB$ частью $MM'B$, мы получимъ полигонъ, у котораго ошибка вдоль AB больше чѣмъ у прежняго, но видъ полученнаго полигона будетъ болѣе простой. Полученный полигонъ можно замѣнить такимъ же точно образомъ полигономъ еще болѣе простого вида и т. д., пока не дойдемъ до полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, ошибку коего мы знаемъ.

Такимъ образомъ искомый предѣлъ будетъ равенъ:

$$\max dRl^2 = \frac{L^2 N}{3} da^2 \cdot \varphi_2(Z)$$

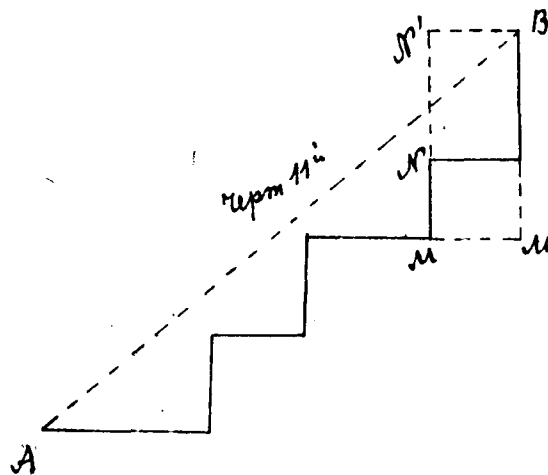
Значенія $\varphi_2(Z)$ для Z отъ 0 до 1 даны на стр. 6.

Итакъ, каковъ бы ни былъ видъ разсматриваемыхъ полигоновъ, ошибка вдоль линіи полигона всегда остается значительно меньше ошибки \perp направленію полигона.

Кромѣ того можно еще указать и предѣльную

минимальную величину ошибки dRl для любого полигона, разсматриваемого вида.

Для полигона, состоящаго изъ трехъ прямолинейныхъ частей, этотъ minimum равенъ ошибкѣ dRl полигона $ABCD$, дѣлящаго пополамъ линію BC . см. черт. 12.



Этотъ полигонъ наиболѣе приближается по своему виду къ вытянутому. Его точки перелома B и C находятся на равномъ разстояніи отъ линіи AD .

Можно доказать, что для полигона, состоящаго изъ n прямолинейныхъ частей, пересѣкающихся подъ прямыми углами, minimum dRl будетъ для такой его формы, которая наиболѣе походитъ на вытянутый полигонъ, т. е. всѣ точки переломовъ лежатъ на равномъ разстояніи отъ линіи, проходящей черезъ начальную и конечную точку.

Не трудно убѣдиться элементарными рассужденіями въ справедливости такого положенія.

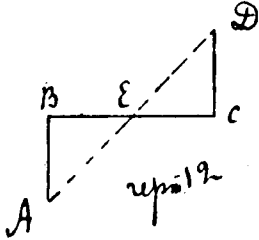


На прямой AB дана произвольная точка C . Раздѣлимъ CB на n равныхъ частей, пусть $DB = \frac{1}{n} CB$; раздѣлимъ AD на n равныхъ частей, найдемъ точку C_1 , гдѣ $AC_1 = \frac{1}{n} AD$; раздѣлимъ C_1B на n равныхъ частей и т. д. Въ предѣлѣ вся прямая AB раздѣлится на $n+1$ равныхъ частей.

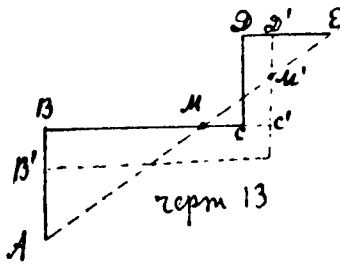
Докажемъ далѣе, что если высказанное выше утвержденіе о minimumѣ dRl справедливо для полигона состоящаго изъ n и меньшаго числа частей

то оно будетъ справедливо и для полигона, состоящаго изъ $n + 1$ частей.

Мы не будемъ однако приводить этого доказательства полностью въ виду элементарности, замѣтимъ только, что оно приводитъ къ положенію о дѣленіи линіи АВ въ n равныхъ частей.



Напримѣръ для полигона вида ABCDE, состоящаго изъ четырехъ прямолинейныхъ частей, отъ замѣны части MCDE частью MC'D'E ошибка dRl уменьшится. Отъ замѣны части M'C'BA частью M'C''B'A (M' середина ME) ошибка еще уменьшится (M'' середина M' A).



Продолжая постепенно замѣнять такимъ же образомъ, мы раздѣлимъ линію AE на 3 равныя части, т. е. придемъ къ полигону, наиболее приближающемуся къ вытянутому.

Если N будетъ общее число становъ, если полигонъ, приближающійся наиболее къ вытянутому, дѣлить прямую, соединяющую начало и конецъ съемки на n равныхъ частей, то выраженіе для dRl будетъ таково

$$dRl = \frac{1}{n} dR'l$$

Здѣсь $dR'l$ есть погрѣшность вдоль направленія полигона, состоящаго изъ двухъ прямолинейныхъ частей, имѣющаго то же N и то же Z и идущаго между тѣми же двумя точками.

Выраженіе $dRl = \frac{1}{n} dR'l$ справедливо, какъ и всѣ предыдущія лишь при значительномъ числѣ N .

При значительномъ числѣ n число становъ въ каждой изъ отдѣльныхъ частей можетъ сдѣлаться небольшимъ и формула будетъ неточна. Произойдетъ это потому, что мы положили сумму $1 + 2^2 + 3^2 +$

$\dots + N^2$ равной $\frac{N^3}{3}$, а на самомъ дѣлѣ она $= \frac{N^2}{3} + \frac{N^3}{2} + \frac{N}{6}$.

Если принять во вниманіе еще членъ $\frac{N^2}{2}$, то и для сравнительно небольшого числа становъ формула получается достаточно точной.

Напримѣръ для $N=3$ точное значеніе суммы квадратовъ отъ 1 до $N^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$, а вычисленное по формулѣ $\frac{N^2}{3} + \frac{N^3}{2} = 13,5$, т. е. приближенная формула даетъ значеніе суммы до 4% определяемой величины.

Если принять во вниманіе членъ порядка $\frac{N^2}{2}$, то выраженіе для dRl для полигона, имѣющаго шіишимъ dRl получить такой видъ:

$$dRl = d\alpha^2 \varphi_2^2(Z) \frac{L^2 N}{3n^2} \left(1 + 3 \frac{n}{N}\right)$$

или:

$$dRl = \frac{1}{n} dR'l \cdot \sqrt{1 + \frac{3n}{N}}$$

Все что ранѣе было сказано о накопленіи погрѣшностей въ рудничныхъ полигонахъ можетъ быть сведено къ слѣдующему.

Какой бы ни былъ данъ полигонъ, состоящій изъ болѣе или менѣе значительныхъ прямолинейныхъ участковъ, пересѣкающихся подъ прямыми углами, можно получить понятіе о величинѣ погрѣшностей dR, dRl и $dR\tau$ накопившейся въ любомъ его пунктѣ, зная $N, d\alpha, L$ и Z , т. е. число становъ, среднюю погрѣшность измѣренія одного угла теодолитомъ, длину линіи, соединяющей начальную точку съемки съ разсматриваемой и отношеніе длины проэекціи полигона на ось X къ длинѣ проэекціи на ось Y , причеиъ: (назовемъ для краткости $F = L d\alpha \sqrt{\frac{N}{3}}$ величину погрѣшности, определяемой по формулѣ Юрдана).

1) Ошибка dR положенія.

Она заключаетъ между $\varphi_1(Z) \cdot F$ и

$$\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right) \cdot F$$

для $Z < 1$, а для $Z > 1$ между $\varphi_1\left(\frac{1}{Z}\right) F$ и $\varphi_3(Z) F$,

гдѣ всѣ значенія функций φ_1 и φ_3 можемъ взять по таблицамъ. Взявъ $k =$

$$\frac{\varphi_1(Z) + \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)}{2} \text{ или } K = \frac{\varphi_1\left(\frac{1}{Z}\right) + \varphi_3(Z)}{2} \text{ и поло-}$$

живъ $dR = kF$, опредѣлимъ dR съ точностью $13\frac{1}{2}\%$ отъ F .

Положивъ $dR = F$, сдѣлаемъ погрѣшность въ опредѣленіи dR или -19% или $+9\%$ отъ F .

2) Ошибка $dR\tau$ поперечная.

Она заключается между $\varphi_3(Z)F$ и $\varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)F$, гдѣ значенія φ_3 можно взять изъ таблицъ.

Взявъ $k = \frac{\varphi_3(Z) + \varphi_3\left(\frac{1}{Z}\right)}{2}$ и положивъ $dR\tau = kF$

мы опредѣлимъ $dR\tau$ съ точностью въ наименѣе благоприятномъ случаѣ до 11% отъ F .

Положивъ $dR\tau = F$, мы сдѣлаемъ погрѣшность въ опредѣленіи $dR\tau$ самое большее $+9\%$ или -13% отъ F .

3) Ошибка dRl вдоль господствующаго протяженія полигона.

Для этой ошибки можно дать предѣльную большую величину: $dRl \text{ max.} = \varphi_2(Z)F$, гдѣ $\varphi_2(Z)$ найдемъ изъ таблицъ или вычислимъ по формулѣ $\varphi_2(Z) = \frac{Z}{Z_2 + 1}$.

Ошибка dRl вообще говоря мала но сравненію съ продольной ошибкой, на копившейся отъ погрѣшности измѣренія длинъ.

Такимъ образомъ для любого полигона для dR и $dR\tau$ легко найти высшій и низшій и притомъ довольно тѣсные предѣлы. Для dRl можно легко получить высшій предѣлъ.

Добавленія.

1) Къ стр. 2.

Погрѣшность dRl точки || заданному направленію есть погрѣшность длины проэкции полигона на заданное направленіе. Такъ какъ длины становъ суть непосредственно измѣренныя величины, то для нахождения dRl надо составить сумму квадратовъ погрѣшностей причиняемыхъ длинъ проэкции полигона неправильностью измѣренія длины каждаго отдѣльнаго стана и изъ полученной суммы извлечь квадратный корень.

Очевидно далѣе, что погрѣшность, причиняемая длинъ проэкции полигона на направленіе || заданному неправильностью измѣренія одного стана есть

погрѣшность проэкции на заданное направленіе длины самого стана, или, что все равно,—проэція погрѣшности длины стана на заданное направленіе—отсюда уже съ очевидностью вытекаетъ справедливость положенія.

2) Къ стр. 3.

Возьмемъ полигонъ какого угодно вида и назовемъ S_i длину какого нибудь стана, β_i его азимутъ и α_i предшествующій стану полигонный уголъ.

Координаты $(X_n \ Y_n)$ послѣдней точки полигона будутъ таковы:

$$x_n = x_0 + \sum_{i=h}^{i=1} S_i \sin \alpha_i$$

$$y_n = y_0 + \sum_{i=n}^{i=1} S_i \sin \alpha_i$$

Здѣсь x_0 и y_0 координаты начального пункта полигона.

Какъ извѣстно $\beta_i = \beta_{i-1} + \alpha_i \pm 180^\circ = \sum_{i=1}^{i=1} \alpha_i \pm i 180^\circ$.

Пусть ΔX_n будетъ погрѣшность абсциссы X_n и ΔY_n погрѣшность ординаты Y_n (и та и другая погрѣшности—зависящія только отъ неправильности измѣренія горизонтальныхъ угловъ).

Назовемъ $d\alpha_i$ погрѣшность измѣренія угла α теодолитомъ, тогда будемъ имѣть:

$$(\Delta x_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \left[\frac{d}{d\alpha_i} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i \right) \cdot d\alpha_i \right]^2 \quad (1)$$

$$(\Delta y_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \left(\frac{d}{d\alpha_i} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \sin \beta_i \right) d\alpha_i \right)^2 \quad (2)$$

Разсмотримъ сначала равенство (1). Его можно изобразить въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} (\Delta x_n)^2 = & \left[\frac{d}{d\alpha_1} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i \right) \right]^2 d\alpha_1^2 + \\ & + \left[\frac{d}{d\alpha_2} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i \right) \right]^2 d\alpha_2^2 + \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots + \left[\frac{d}{d\alpha_n} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i \right) \right]^2 d\alpha_n^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Разсмотримъ первый членъ равенства (1)

$$\frac{d}{d\alpha_1} \left(\sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i \right) = - \left(S_1 \sin \beta_1 \cdot \frac{d\beta_1}{d\alpha_1} + S_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{d\beta_2}{d\alpha_1} + S_3 \cdot \sin \beta_3 \cdot \frac{d\beta_3}{d\alpha_1} + \dots + S_n \sin \beta_n \frac{d\beta_n}{d\alpha_1} \right) =$$

$$= - (S_1 \cdot \sin \beta_1 + S_2 \sin \beta_2 + S_3 \cdot \sin \beta_3 + \dots + S_n \sin \beta_n) = - \sum_{i=n}^{i=1} S_i \sin \beta_i,$$

такъ какъ всѣ производныя $\frac{d\beta}{d\alpha_1}$ будутъ равны = 1.

Выраженіе $\sum_{i=n}^{i=1} S_i \sin \beta_i$ есть разность ординатъ начальной и разсматриваемой точекъ полигона, обозначимъ эту разность черезъ η_1 .

Если мы напишемъ въ развернутомъ видѣ

$$\frac{d}{d\alpha_2} \sum_{i=n}^{i=1} S_i \cos \beta_i, \text{ то увидимъ, что } \frac{d\beta_1}{d\alpha_2} = 0, \text{ а всѣ}$$

остальныя производныя $\frac{d\beta}{d\alpha_2}$ равны = 1, слѣдовательно выраженіе, стоящее въ квадратныхъ скобкахъ во второмъ членѣ равенства (3) преобразуется въ такое:

$$- \sum_{i=n}^{i=2} S_i \sin \alpha_i$$

что есть равенство ординатъ второй точки полигона и послѣдней, назовемъ эту разность η_2 .

Для третьяго, четвертаго и т. д. членовъ нетрудно получить аналогичныя значенія.

Въ результатѣ получимъ:

$$(\Delta x_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \eta_i^2 d\alpha_i^2$$

Здѣсь η_i есть разность ординатъ точки i и послѣдней точки полигона (вѣрнѣе разсматриваемой точки полигона).

Аналогично этому получится:

$$(\Delta y_n)^2 = \sum_{i=n}^{i=1} \xi_i^2 d\alpha_i^2$$

Записки горн. инст. т. IV, в. III.

Здѣсь ξ_i есть разность абсциссъ i -й точки и послѣдней точекъ полигона.

Если мы вообразимъ себѣ полигонъ, у котораго вершины суть ироэкции вершинъ даннаго на ось абсциссъ, то очевидно величины ξ будутъ соответственно одинаковы для того и другаго полигоновъ.

Если мы вообразимъ себѣ полигонъ, у котораго вершины суть проэкции вершинъ даннаго на ось ординатъ, то величины η для этихъ двухъ полигоновъ будутъ соответственно равны.

Отсюда слѣдуетъ, что величина погрѣшности ΔX для даннаго полигона будетъ равна соответственной величинѣ для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть ироэкции вершинъ даннаго на ось ординатъ; величина погрѣшности Δy для даннаго полигона будетъ равна соответственной величинѣ для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть проэкции вершинъ даннаго на ось абсциссъ.

При этомъ предполагается, что погрѣшности $d\alpha$ для даннаго и спроектированнаго полигона будутъ соответственно одинаковы.

Предположимъ теперь, что намъ надо найти погрѣшность точки полигона || какому нибудь заданному направленію.

Повернемъ координатныя оси такимъ образомъ, чтобы направленію одной изъ нихъ (скажемъ OX) совпало съ заданнымъ направлениемъ; тогда можемъ формулированныя только что слѣдствія распространить и на данный случай, замѣтивъ, что Δy и будетъ искомой погрѣшностью.

Отсюда и слѣдуетъ, что величина погрѣшности точки въ какомъ нибудь направленіи для любого полигона равна соответственной величинѣ погрѣшности для такого вытянутаго полигона, коего вершины суть ироэкции вершинъ даннаго полигона на направление, перпендикулярное данному (предполагая $d\alpha$ соответственно одинаковы для обоихъ полигоновъ).

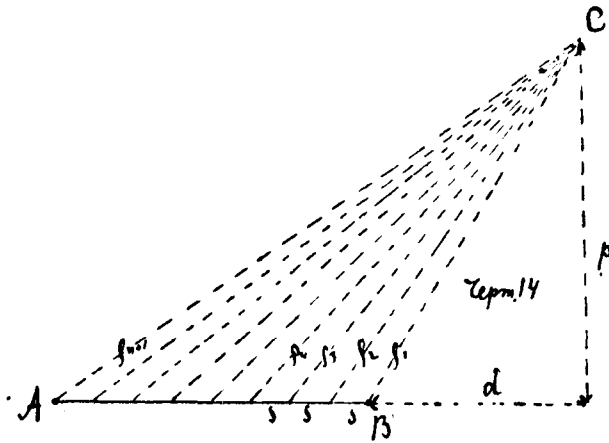
Къ стр. 3.

Для доказательства этого положенія замѣтимъ, что

$$dr^2 = \sum \rho^2 d\alpha^2$$

гдѣ ρ есть разстояніе любой точки полигона до той точки, погрѣшность которой ищется.

На чертежѣ линия АВ представляет данную прямолинейную часть полигона, значеніе остальных обозначеній объяснено выше.



Если длины становъ въ части АВ примѣрно одинаковы, то $d\alpha$ можно вынести за знак Σ , остается найти $\Sigma \rho^2$.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= p^2 + d^2 \\ \rho_2^2 &= p^2 + (d + s)^2 = p^2 + d^2 + s^2 + 2ds \\ \rho_3^2 &= p^2 + (d + 2s)^2 = p^2 + d^2 + 2^2 \cdot s^2 + 2 \cdot d \cdot 2s \\ \rho_4^2 &= p^2 + (d + 3s)^2 = p^2 + d^2 + 3^2 \cdot s^2 + 2 \cdot d \cdot 3s \\ &\dots \\ \rho_{n+1}^2 &= p^2 + (d + ns)^2 = p^2 + d^2 + n^2 s^2 + 2 \cdot d \cdot ns \end{aligned}$$

$$\Sigma \rho^2 = (1 + n) \cdot (p^2 + d^2) + s^2 \Sigma 1^2, 2^2, 3^2, \dots$$

$$\dots n^2 + 2ds \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

Принимая $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3}$, и $\frac{(n+1)n}{2} = \infty \frac{n^2}{2}$ и опуская 1 въ $1+n$, получимъ

$$\Sigma \rho^2 = n(p^2 + d^2) + \frac{n^3}{3} s^2 + dsn^2$$

Къ стр. 4.

Повѣркой должно служить равенство:

$$dR^2 = dR_\tau^2 + dR_1^2$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$dR_\tau^2 = \frac{s d \alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \left(\frac{n_1^5}{3} + \frac{n_2^5}{3} + n_1 n_2^4 + n_2^2 n_1^3 \right)$$

$$dR_1^2 = \frac{s^2 d \alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \left(\frac{n_1^3 n_2^2}{3} + \frac{n_2^3 n_1^2}{3} \right)$$

$$dR_\tau^2 + dR_1^2 = \frac{s^2 d \alpha^2}{3(n_1^2 + n_2^2)} \left(n_1^5 + 4 n_1^3 n_2^2 + n_1^2 n_2^3 + \right.$$

$$\left. 3 n_1 n_2^4 + n_2^5 \right) = \frac{s^2}{3} \cdot \frac{d \alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot (n_1^2 + n_2^2) (n_1^3 + n_2^3 +$$

$$3 n_1 n_2^2) = \frac{s^2 d \alpha^2}{n_1^2 + n_2^2} \cdot \left(\frac{n_1^3}{3} + \frac{n_2^3}{3} + n_1 n_2^2 \right)$$

что и требовалось показать

Къ стр. 13.

Въ самомъ дѣлѣ, по способу построения.

$$DB = \frac{AB - AC}{n}$$

Раздѣля теперь линію AD, которая очевидно = AB - DB, на n равныхъ частей, получимъ:

$$AC_1 = \frac{1}{n} AD = \frac{AB}{n} - \frac{AB - AC}{n^2}$$

Раздѣля теперь линію C₁B, которая = AB - AC₁, на n равныхъ частей, найдемъ D₁B.

$$D_1 B = \frac{1}{n} C_1 B = \frac{AB - AC_1}{n} = \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB - AC}{n^3} + \dots$$

Такимъ же образомъ найдемъ при слѣдующемъ дѣленіи:

$$AC_2 = \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB}{n^3} - \frac{AB - AC}{n^4}$$

Въ предѣлѣ:

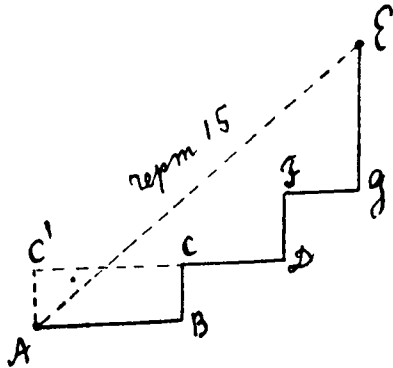
$$\begin{aligned} (AC_k) &= \frac{AB}{n} - \frac{AB}{n^2} + \frac{AB}{n^3} - \frac{AB}{n^4} \dots = \\ &= AB \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^4} \dots \right) = \frac{AB}{n+1} \end{aligned}$$

Къ стр. 14.

Въ общемъ видѣ это предложеніе доказывается такъ же.

Пусть данъ полигонъ заключенный между точками А и В (стр. 18). Пусть точка М лежитъ на линіи АВ. По допущенію теорема справедлива для полигоновъ заключенныхъ между точками А и М, а также между точками М и В.

Пусть теперь M' первая отъ A точка дѣленія линіи AE . По допущенію теорема справедлива для



полигона заключеннаго между точками M' и E и мы получаемъ то первое раздѣленіе линіи, которое аналогично раздѣленію CB на n равныхъ частей въ предыдущей выносѣ.

Пусть M_2 теперь ближайшая къ AE точка дѣленія. По допущенію теорема справедлива для полигона между точками M_2 и A ; получимъ второе раздѣленіе линіи, аналогичное дѣленію AD на n равныхъ частей въ предыдущей выносѣ такъ же получимъ третье, четвертое и т. д. раздѣленія, пока вся линія AE не раздѣлится на $n+1$ равную часть.

Замѣчаніе 1-ое. Приведенное доказательство имѣетъ строгій смыслъ только для бесконечно большаго числа становъ въ полигонѣ. Практически же нѣтъ смысла продолжать дѣленіе до бесконечности, ибо рядъ $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \dots$ есть весьма быстро сходящійся.

Замѣчаніе 2-ое. Возможны такіе полигоны, которые не пересѣкутъ линію AE . Напримѣръ полигонъ вида (см. черт. 18).

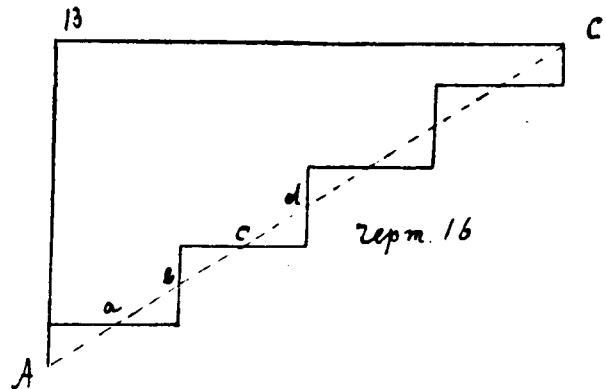
AB CDFGE

Но согласно положенію, доказанному на стр. 11. погрѣшность dRl отъ замѣны части ABC полигономъ $AC'C$ уменьшается, а такъ какъ мы разыскиваемъ $\text{minimum } dRl$ для нашего полигона, почему и можемъ произвести такую замѣну, то тогда необходимая намъ точка пересѣченія съ линіей AE получается.

Къ стр. 14.

Для доказательства этого равенства возьмемъ полигонъ ABC и предположимъ, что полигонъ, иду-

щій отъ A къ C дѣлитъ AC на n равныхъ частей. Длины становъ во всѣхъ полигонахъ одинаковы.



Тогда будемъ имѣть:

$$(dR'l)^2 \text{ для } ABC = \frac{L^2 da^2}{3} \cdot N \varphi_2^2(Z) \text{ см. стр. 4.}$$

Здѣсь $L = AC$, N общее число становъ въ полигонѣ $A \dots E$ остальные обозначенія см. стр. 4.

Для полигона Aa получимъ, замѣнивъ L черезъ

$$\frac{L}{n} \text{ и } N \text{ черезъ } \frac{N}{n}$$

$$(dRl_n)^2 = \left(\frac{L}{n}\right)^2 \cdot \frac{da^2}{n} \cdot \frac{N}{n} \cdot \varphi^2(Z) = \frac{1}{n^2} (dR'l)^2$$

Для полигона ab выраженіе для продольной погрѣшности будетъ также равно dRl_n , для bc , cd и т. д. тому же dRl_n , для всего полигона $Abcd \dots e$ получимъ:

$$dR_l^2 = n (dRl_n)^2 = \frac{1}{n} (dR'l)^2.$$

Къ стр. 15.

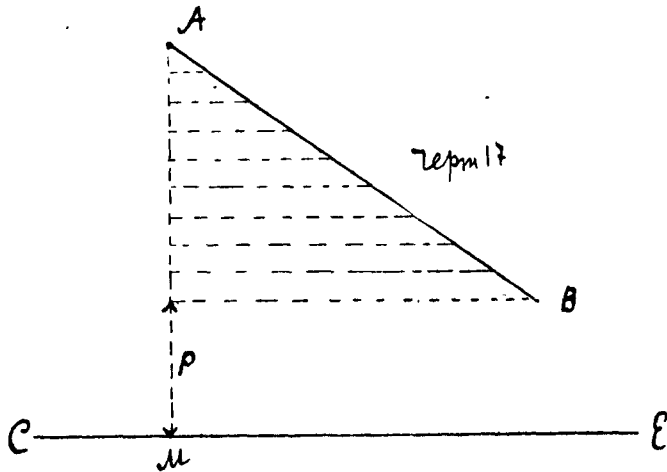
Пределами погрѣшности dRl для любого полигона служатъ съ одной стороны $\varphi_2(Z) \cdot F$, а съ другой стороны $\frac{1}{n} \varphi_2(Z) \cdot F$.

Эти пределы могутъ оказаться весьма широкими ибо со стороны minimum 'а мы величину dRl имѣемъ не достаточно ограниченной.

Слѣдующее разсужденіе можетъ помочь установить болѣе тѣсные пределы для dRl въ различныхъ случаяхъ практики.

Для этого разсмотримъ первоначально такой вопросъ: полигонъ AB , имѣющій N примѣрно одина-

ковыхъ становъ составляетъ часть полигона опредѣляющаго точку Е. Найти погрѣшность точки Е || линіи СЕ, зависящую отъ неправильности измѣ-



ренія угловъ въ части АВ. Спроектировавъ часть АВ на $AM \perp CE$ и назвавъ черезъ s проекцію длины стана на направленіе AM , черезъ p разстояніе точки В до линіи CE и предполагая $d\alpha$ одинаковыми между собою, найдемъ искомое dRl

$$dR_1^2 = d\alpha^2 [p^2 + (p+s)^2 + (p+2s)^2 + \dots + (p + Ns)^2] = d\alpha^2 \left[Np^2 + \frac{N^3}{3} S^2 + N^2 ps \right]$$

Если АВ пересѣкаетъ СЕ, располагаясь такъ, что по одной сторонѣ имѣемъ n_1 , а по другой n_2 становъ, то выраженіе для dRl будетъ таково

$$dR_1^2 = d\alpha^2 s^2 \left[\frac{n_1^3}{3} + \frac{n_1^2}{2} + \frac{n_1}{6} + \frac{n_2^3}{3} + \frac{n_2^2}{2} + \frac{n_2}{6} \right]$$

Здѣсь вмѣсто приближенной формулы:

$$\sum_{i=1}^{i=N} i^2 = \frac{3}{3}$$

введено точное значеніе формулы:

Такъ какъ общее число становъ въ полигонѣ равно N , то $n_2 = N - n_1$

Замѣнивъ этимъ выраженіемъ n_2 , получимъ:

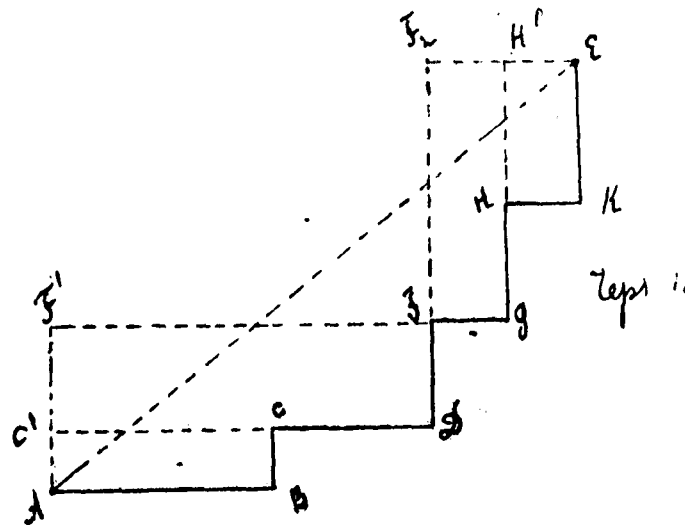
$$dR_1^2 = d\alpha^2 s^2 \left[\frac{n_1^3}{3} + \frac{n_1^2}{2} + \frac{n_1}{6} + \frac{N^3 - 3N^2 n_1 + 3N n_1^2 - n_1^3}{3} + \frac{N^2 - 2N n_1 + n_1^2}{2} + \frac{N - n_1}{6} \right] = d\alpha^2 \cdot s^2 \left[\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} - N^2 n_1 + N n_1^2 - N n_1 + n_1^2 \right] = d\alpha^2 s^2 \left[\frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6} + (N+1)(n_1^2 - N n_1) \right]$$

Выраженіе dRl при измѣненіи n_1 принимаетъ минимумъ одновременно съ выраженіемъ $n_1^2 - N n_1$, т. е.

при $n_1 = \frac{N}{2}$.

Отсюда слѣдуетъ:

При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ полигона АВ || самому себѣ наименьшее значеніе dRl будетъ тогда, когда СЕ раздѣлитъ АВ пополамъ. Или:



При всевозможныхъ перемѣщеніяхъ АВ || самому себѣ dRl уменьшается, если разстоя-

нѣ середины АВ отъ СЕ уменьшается и на оборотъ.

Пользуясь этимъ можно въ каждомъ данномъ случаѣ преобразовать данный полигонъ съ цѣлью получить болѣе тѣсныя границы значенія dRl со стороны minimum'a, напримѣръ:

Данъ полигонъ, состоящій изъ 8 частей. По стр. 14, minimum его dRl равенъ $= \frac{1}{7} \varphi_2(Z) \cdot F$.

Но пользуясь только что сейчасъ доказаннымъ положеніемъ, можно часть АВС замѣнить черезъ

АС'С; ибо при этомъ середины АВ и ВС приближаются къ АЕ.

На томъ же основаніи часть С'DF замѣнимъ частью С'F'F, часть НКЕ частью НН'ε и часть Fgε, частью FF₂Е.

Вмѣсто даннаго получился полигонъ АF'FF₂Е, у котораго dRl менѣ даннаго. Слѣдовательно minimum dRl для даннаго будетъ не $\frac{1}{7} \varphi_2(Z)F$, а $\frac{1}{3} \varphi_2(Z)F$.

18. Обь оптическомь изслѣдованіи минераловъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ.

А. Н. Заварицкаго.

(Доложено 14 января 1913 г.).

При оптическомь изслѣдованіи минераловъ подь микроскопомъ въ настоящее время примѣняются два метода: изслѣдованіе въ параллельномъ поляризованномъ свѣтѣ по способу проф. Е. С. Федорова и изслѣдованіе въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ. Несмотря на то, что оба эти метода покоятся, въ сущности, на однихъ и тѣхъ же основаніяхъ, именно на законахъ распространенія свѣтовыхъ волнъ въ анизотропной средѣ, они излагаются въ различныхъ руководствахъ такъ, что изъ этого изложенія совершенно не видно связи между тѣмъ и другимъ.

Въ настоящей статьѣ предлагается попытка вывода главныхъ положеній, лежащихъ въ основѣ примѣненія сходящагося свѣта, исходя изъ основаній теодолитнаго метода. Этотъ именно иуть является наиболѣе цѣлесообразнымъ, если слѣдовать требованію итти отъ болѣе простаго къ болѣе сложному. Какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго, логическое развитіе въ этомъ направленіи основныхъ положеній теодолитнаго метода приводитъ почти къ тѣмъ же представленіямъ, изъ которыхъ исходилъ Бекке¹⁾ при объясненіи явленій, обнаруживаемыхъ кристалломъ въ сходящемся свѣтѣ. Поэтому многое въ настоящей статьѣ является повтореніемъ въ соответственнo переработанномъ видѣ того, что мы находимъ въ указанной работѣ Бекке. Избѣжать совершенно такихъ повтореній я не могъ отчасти изъ-за связи изложенія, а кромѣ того считалъ ихъ не бесполезными въ виду отсутствія въ русской литературѣ достаточно обоснованнаго изложенія приемовъ употребленія сходящагося свѣта.

Помимо нѣкотораго теоретическаго интереса, который можетъ имѣть изложеніе этихъ приемовъ, исходя изъ представленій, положенныхъ въ основу теодолитнаго метода, оно мнѣ казалось полезнымъ въ цѣляхъ сравнительной оцѣнки предѣловъ примѣненія каждаго изъ этихъ двухъ различныхъ способовъ изслѣдованія.

§ I. Основные положенія.

Изслѣдованіе какихъ бы то ни было физическихъ свойствъ анизотропно-однороднаго кристаллическаго вещества по необходимости должно быть изслѣдованіемъ свойствъ отдѣльныхъ направленій въ кристаллѣ и сооставленіемъ между собою свойствъ различныхъ направленій. Только съ тѣхъ поръ, какъ мы связываемъ элементы наблюдаемыхъ явленій съ опредѣленными векторами въ кристаллѣ, мы можемъ говорить обь изслѣдованіи свойствъ кристалла, какъ тѣла векторіально построеннаго. Понятно, поэтому, что основной, логически вытекающей изъ самаго понятія о кристалличности приемъ изслѣдованія долженъ дать возможность поставить наблюдаемое явленіе въ такія условія, когда мы можемъ отдѣльно для каждаго направленія въ кристаллѣ опредѣлить элементы этого явленія и затѣмъ сопоставлять ихъ между собою.

При оптическомъ изслѣдованіи наблюдаются явленія, обнаруживающіяся при прохожденіи свѣта черезъ кристаллѣ. Совершенно независимо отъ какихъ-либо гипотетическихъ воззрѣній на природу свѣта въ основѣ представленій о распространеніи свѣтовой энергіи лежитъ понятіе о свѣтовой волнѣ. Если мы зададимся вопросомъ, канія волны удовлетворяютъ

¹⁾ F. Becke—Optische Untersuchungsmethoden. Denksch. d. mat.-nat. Kl. d. Akad. der. Wissensch. Wien B. LXXV 1904.

требованію, чтобы наблюдаемые элементы явления зависели только отъ одного направленія распространенія волнъ, то мы должны будемъ признать, что такими являются только плоскія волны. Только при прохожденіи плоскихъ волнъ чрезъ кристаллическую среду ихъ свойства вполне опредѣляются направлениемъ ихъ распространенія и одинаковы во всѣхъ точкахъ волны. Въ другихъ волнахъ въ различныхъ точкахъ одной и той же волны свойства ея, напримѣръ, направленія колебаній различны и зависятъ не только отъ направленія распространенія волны въ этой точкѣ, но и отъ положенія ея по отношенію къ источнику свѣта. Кромѣ того плоскія волны, переходя изъ одной среды въ другую, отдѣленную отъ первой плоскостью, остаются плоскими, а въ каждой средѣ, изотропной или анизотропной, распространяются, оставаясь себѣ параллельными. Всѣ эти положенія имѣютъ очевидность почти аксіомъ, и на нихъ не приходится останавливаться.

Изъ этихъ особенностей плоскихъ свѣтовыхъ волнъ, отличающихъ ихъ отъ всѣхъ другихъ, само собою вытекаетъ слѣдствіе, что основнымъ методомъ оптическаго изслѣдованія кристаллическаго вещества долженъ считаться именно теодолитный методъ проф. Федорова, при которомъ мы изслѣдуемъ непосредственно иростѣйшій случай распространенія плоскихъ волнъ по различнымъ направленіямъ въ кристаллѣ, совмѣщая эти направленія съ осью микроскопа. Изслѣдованіе въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ имѣетъ дѣло съ болѣе сложными явленіями, которыя и должны быть объяснены, сводя ихъ къ только что указанному элементарному случаю распространенія плоскихъ волнъ.

По тѣмъ же соображеніямъ основы теоріи кристаллооптики ¹⁾ должны быть построены, исходя изъ представленія объ оптическомъ эллипсоидѣ (индикатриссѣ), характеризующемъ распространеніе плоскихъ волнъ. Всѣ остальные поверхности, изображающія распредѣленіе оптическихъ свойствъ въ кристаллѣ, должны выводиться изъ индикатриссы. Это далеко не всегда соблюдается въ учебныхъ руководствахъ, особенно по отношенію къ поверхности волны, которую выводятъ изъ второго эллипсоида Френеля (Ellipsoide direct, Fresnelsches Ellipsoid), не связывая никакъ съ индикатриссой.

Геометрическая связь между главнѣйшими изъ оптическихъ поверхностей въ логической послѣдовательности, какъ извѣстно, можетъ быть представлена въ такомъ видѣ.

Основная поверхность—оптическій эллипсоидъ (индикатрисса). Непосредственно изъ нея выводится поверхность нормальныхъ скоростей плоскихъ волнъ (Surface des vi-

tesses normales), радіусы-векторы которой обратно пропорціональны осямъ эллипса сѣченія индикатриссы плоскостью, перпендикулярной къ данному радіусу-вектору. Проводя черезъ какую-либо точку этой поверхности плоскость, перпендикулярную къ соответствующему радіусу-вектору, получимъ положеніе плоской волны, распространяющейся въ направленіи этого радіуса-вектора, чрезъ опредѣленный промежутокъ (единицу) времени послѣ того, какъ она была въ центрѣ. Если сдѣлать такое построение во всѣхъ точкахъ поверхности нормальныхъ скоростей, то получимъ совокупность плоскостей, которыя всѣ будутъ касательными къ поверхности волны, распространяющейся изъ центра. Это послѣднее свойство и выражаетъ связь поверхности волны съ поверхностью нормальныхъ скоростей, а чрезъ нее и съ индикатриссой.

Уравненія этихъ главнѣйшихъ поверхностей приводятся въ болѣе подробныхъ учебныхъ руководствахъ Дюпарка и Пирса ¹⁾, Розенбуша и Вюльфинга ²⁾, но вывода ихъ въ этихъ руководствахъ не дано. Такъ какъ мнѣ придется въ дальнѣйшемъ ссылаться на уравненіе поверхности нормальныхъ скоростей, то я позволю себѣ привести здѣсь его выводъ въ возможно простомъ видѣ.

Исходимъ ихъ уравненія индикатриссы:

$$\frac{x^2}{n_g^2} + \frac{y^2}{n_m^2} + \frac{z^2}{n_p^2} = 1.$$

или

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1,$$

гдѣ

$$a = \frac{1}{n_g}; \quad b = \frac{1}{n_m}; \quad c = \frac{1}{n_p}.$$

Пусть углы какого-нибудь радіуса-вектора искомой поверхности съ осями координатъ λ , μ и ν . По вышесказанному для построенія искомой поверхности надо на направленіи радіуса-вектора отложить величины, обратно пропорціональныя осямъ эллипса сѣченія индикатриссы плоскостью.

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0.$$

Вообще каждой точкѣ (x, y, z) эллипса сѣченія отвѣчаетъ другая его точка, отстоящая отъ центра на разстояніи r , при чемъ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; только для концовъ осей эллипса эти пары точекъ сливаются. Если мы будемъ откладывать отъ центра во всѣ стороны величину r , то получимъ сферу, вообще пересѣкающую эллипсоидъ по кривой, пересѣкающейся съ разсматриваемымъ эллипсомъ сѣченія. Но эта кривая становится касательною къ эллипсу сѣченія, когда r становится равнымъ его полуоси. Изъ этого условія касанія и можно найти величину полуоси эллипса сѣченія. Прежде всего замѣнимъ условіе касанія кривыхъ равнозначнымъ ему условіемъ касанія

¹⁾ Duparc et Pearce—Traité de technique minéralogique et pétrographique. I partie. 1907.

²⁾ Rosenbusch und Wülfing—Mikroskopische Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien. I Hälfte 1904.

¹⁾ Я говорю о томъ объемѣ этого ученія, въ какомъ оно входитъ въ такія руководства, какъ Розенбуша, Дюпарка, Никитина, не касаясь, конечно, специальныхъ сочиненій.

поверхностей, которая получатся, если соединить всѣ точки этихъ кривыхъ съ центромъ. Это будутъ плоскость:

$$x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = 0.$$

и коническая поверхность

$$f = x^2 \left(a - \frac{1}{r^2} \right) + y^2 \left(b^2 - \frac{1}{r^2} \right) + z^2 \left(c^2 - \frac{1}{r^2} \right) = 0.$$

Условіе ихъ касанія:

$$\cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \cos \lambda : \cos \mu : \cos \nu &= \left(a^2 - \frac{1}{r^2} \right) x : \left(b^2 - \frac{1}{r^2} \right) y : \\ &: \left(c^2 - \frac{1}{r^2} \right) z; \end{aligned}$$

или

$$x : y : z = \frac{\cos \lambda}{a^2 - \rho^2} : \frac{\cos \mu}{b^2 - \rho^2} : \frac{\cos \nu}{c^2 - \rho^2},$$

гдѣ $\rho = \frac{1}{r}$ есть ничто иное, какъ радіусъ-векторъ исконной поверхности, образующій углы съ осями координатъ λ , μ и ν . Изъ послѣдняго отношенія и уравненія плоскости, перпендикулярной къ радіусу-вектору ρ , найдемъ:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{a^2 - \rho^2} + \frac{\cos^2 \mu}{b^2 - \rho^2} + \frac{\cos^2 \nu}{c^2 - \rho^2} = 0.$$

Это, очевидно, и есть искомое уравненіе.

Чтобы выяснитъ соотношеніе между явленіями, наблюдаемыми при изслѣдованіи минераловъ въ параллельномъ свѣтѣ съ одной стороны и въ сходящемся—съ другой, приходится, естественно, обратиться къ разсмотрѣнію полученія сходящагося свѣта посредствомъ конденсора. Такъ какъ при этомъ преобразованіи параллельнаго пучка свѣта въ сходящійся свѣтовая энергія распространяется черезъ изотронныя среды (воздухъ, стекло), то мы можемъ съ удобствомъ воспользоваться для изслѣдованія явленія вспомогательнымъ представленіемъ о лучѣ, являющемся въ данномъ случаѣ нормалью къ поверхности свѣтовой волны.

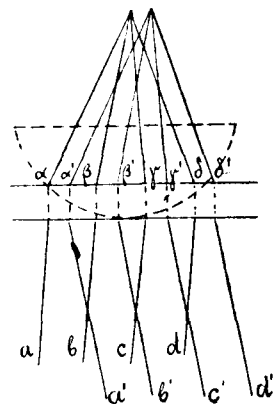
Съ каждой формой волны однозначно связанъ опредѣленный пучокъ лучей. Пучокъ параллельныхъ лучей отвѣчаетъ плоской волнѣ; пучокъ сходящихся въ одной точкѣ—вогнутой волнѣ.

При прохожденіи черезъ конденсоръ каждый па-

раллельный пучокъ превращается въ сходящійся. Такъ какъ въ конденсоръ вступаетъ не одинъ параллельный пучокъ лучей, а безчисленное множество ихъ и съ различными направленіями, хотя и близкими между собою, то послѣ выхода изъ конденсора образуется безконечная совокупность коническихъ пучковъ лучей, вершины которыхъ занимаютъ нѣкоторую площадь, хотя, сравнительно, и небольшую, вслѣдствіе малаго расхожденія направлений плоскихъ волнъ, вступающихъ въ конденсоръ.

Но совокупность всѣхъ лучей этихъ конусовъ можетъ быть также разсматриваема, какъ совокупность параллельныхъ пучковъ, идущихъ по различнымъ направленіямъ, измѣняющимся въ предѣлахъ нѣкотораго конуса. Въдѣ въ каждомъ изъ конусовъ лучей можно выдѣлить по лучу, параллельному заданному направленію, а совокупность этихъ выдѣленныхъ изъ всѣхъ конусовъ лучей образуетъ параллельный пучокъ. Рис. 1 поясняетъ сказанное. Изъ параллельныхъ пучковъ $abcd$ и $a'b'c'd'$, вступающихъ въ конденсоръ, получаютъ сходящіеся пучки $\alpha\beta\gamma\delta$ и $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, но совокупность ихъ можно разсматривать, какъ совокупность параллельныхъ пучковъ $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$.

Фиг. 1.



Такимъ образомъ при примѣненіи сходящагося свѣта явленіе происходитъ такъ, какъ если бы черезъ кристаллъ проходило безконечное множество элементарныхъ плоскихъ волнъ по всѣмъ направленіямъ, заключеннымъ внутри нѣкотораго конуса. Каждая изъ такихъ волнъ, проходя кристаллъ, разлагается на двѣ, остающіяся плоскими, и затѣмъ онѣ преобразуются верхней линзой системы коноскопа. Это преобразование состоитъ въ томъ, что каждая элементарная плоская волна превращается въ

сходящуюся и даетъ дѣйствительную свѣтящуюся точку. Совокупность всѣхъ плоскихъ волнъ даетъ совокупность такихъ точекъ, образующихъ вмѣстѣ интерференціонную фигуру. Ясно, что роль объектива микроскопа, обычно являющагося такою верхней линзой конוסкона, совершенно отлична отъ той, которую онъ выполняетъ при обычныхъ микроскопическихъ наблюденияхъ. Тамъ онъ, преобразуя сходящуюся свѣтовую волну, исходящую изъ какой-либо точки объекта, даетъ изображеніе ея въ видѣ точки же, а въ случаѣ изслѣдованій въ сходящемся свѣтѣ точки интерференціонной фигуры приходится разсматривать, какъ результатъ преобразования объективомъ микроскопа плоскихъ волнъ, проходящихъ чрезъ кристаллъ по различнымъ направленіямъ.

Точки изображеній при обычномъ разсматриваніи предмета въ микроскопѣ гомологичны точкамъ объекта, точки же интерференціонной фигуры коррелятивны направленіямъ въ кристаллѣ.

Всѣ эти элементарныя положенія я привожу здѣсь, чтобы установить исходный нунктъ для объясненія явленій, обнаруживаемыхъ кристалломъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ, путемъ развитія основныхъ положеній теодолитнаго метода.

Мы видимъ, что изслѣдованіе интерференціонной фигуры, т. е. сопоставленіе различныхъ точекъ ея между собой, отвѣчаетъ сопоставленію между собой явленій прохожденія плоскихъ волнъ по различнымъ направленіямъ. При теодолитномъ методѣ послѣднее достигается, приводя послѣдовательно каждое изслѣдуемое направленіе въ совмѣщеніе съ осью микроскопа. Каждой точкѣ интерференціонной фигуры, наблюдаемой при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ, отвѣчаетъ (коррелятивно) опредѣленное положеніе шлифа на универсальномъ столикѣ микроскопа при изслѣдованіи по методу Федорова. Другими словами, при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ отклоненіемъ лучей (волнъ) конденсоромъ достигается до нѣкоторой степени то, что въ универсальномъ методѣ достигается наклонами шлифа на столикѣ. При примѣненіи универсально-оптического (теодолитнаго) метода мы дѣйствуемъ аналитически, расчленяя явленіе на элементы, при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ намъ приходится уже съ самаго начала сопоставлять ихъ между собою, поэтому съ самаго начала предъ нами возникаетъ дзоякаго рода задача: 1) мы должны сравнить между собою плоскія волны, проходящія чрезъ кристаллъ по различнымъ направленіямъ, и 2) выяснить соотношеніе между точками интерференціонной фигуры и соответствующими (образующими ихъ) элементарными плоскими волнами. Очевидно, рѣшеніе первой части задачи должно являться

развитіемъ нашихъ представленій объ оптическихъ свойствахъ кристалла. Это рѣшеніе можетъ быть строго обосновано, исходя изъ опредѣленныхъ положеній. Напротивъ, во второй части задачи намъ приходится имѣть дѣло съ явленіями въ приборѣ; отъ степени его совершенства и отъ особенностей его конструкціи зависитъ ходъ явленій, и потому выводы не могутъ быть такъ же строго обоснованы, какъ въ первомъ случаѣ.

§ 2. Сравненіе плоскихъ волнъ, проходящихъ чрезъ кристаллъ по различнымъ направленіямъ.

По каждому направленію въ кристаллѣ распространяются двѣ плоскія волны, поляризованныя въ взаимно перпендикулярныхъ направленіяхъ и имѣющія различную скорость. Направленіе свѣтовыхъ колебаній въ этихъ волнахъ и разность скоростей ихъ (или величинъ, обратныхъ скоростямъ) или, другими словами, положеніе осей n'_g и n'_p соответствующаго сѣченія индикатриссы и величина разности $n'_g - n'_p$ являются тѣми элементами, которые могутъ и должны быть опредѣлены для каждаго направленія отдѣльно и затѣмъ сопоставлены между собою.

A. Направленія колебаній въ различныхъ плоскихъ волнахъ.

Опредѣленіе направленій колебаній, какъ известно, весьма просто и основано на такихъ положеніяхъ: 1) колебанія совершаются въ плоскости волны; 2) для двусныхъ кристалловъ по теоремѣ Френеля плоскости, проходящія черезъ нормаль къ волнѣ и направленія колебаній, являются биссектрисами смежныхъ угловъ между плоскостями, проходящими черезъ нормаль къ волнѣ и каждую изъ оптическихъ осей, и 3) для одноосныхъ кристалловъ эта теорема превращается въ положеніе, что нормаль къ волнѣ, оптическая ось и одно изъ направленій колебаній лежатъ въ одной плоскости; другое направленіе колебаній перпендикулярно къ первому.

Какъ же сопоставить между собою найденныя такимъ путемъ направленія колебаній?

Простѣйшій путь къ рѣшенію этого вопроса, конечно,—способъ геометрическаго представленія. Мы должны построить при этомъ вспомогательную систему нѣкоторыхъ геометрическихъ элементовъ, однозначно связанныхъ съ элементами, подлежащими нашему изслѣдованію.

Замѣтимъ прежде всего слѣдующую особенность поставленной задачи.

Мы рассматриваемъ сейчасъ направленія колебаній въ зависимости отъ направленія распространенія волнъ. Тѣ и другія направленія имѣютъ совершенно различное физическое значеніе, поэтому они должны изображаться въ нашей вспомогательной системѣ (діаграммѣ) различнымъ образомъ, и слѣдовательно первымъ шагомъ при построеніи искомой геометрической системы должна быть замѣна совокупности направленій одного рода (въ данномъ случаѣ направленій распространенія волнъ) совокупностью коррелятивныхъ имъ другихъ геометрическихъ элементовъ. Этой замѣной мы избѣжимъ двойственности въ нашихъ обозначеніяхъ. Простѣйшимъ соотношеніемъ, которымъ въ данномъ случаѣ можно воспользоваться, является связь между точками сферы и отвѣчающими имъ радиусами. При этомъ совокупность всевозможныхъ направленій распространенія волнъ въ кристаллѣ замѣнится совокупностью точекъ сферы, такъ что каждому изъ этихъ направленій будетъ соответствовать одна вполне опредѣленная точка.

Проведемъ черезъ эту точку направленія свѣтовыхъ колебаній. Такъ какъ они перпендикулярны къ направленію распространенія волны (радіусу сферы), то они будутъ касательными къ сферѣ. Такимъ образомъ совокупность всѣхъ направленій колебаній представится въ видѣ совокупности касательныхъ къ сферѣ. Если мы выяснимъ, какъ измѣняется направленіе этихъ касательныхъ при переходѣ отъ одной точки сферы къ другой, то тѣмъ самымъ мы разрѣшимъ поставленную задачу.

Непосредственное примѣненіе указанныхъ выше положеній для отысканія направленій колебаній позволяетъ легко получить это рѣшеніе. Разсмотримъ отдѣльно сначала одноосные, а затѣмъ двуосные кристаллы.

Въ оптически одноосныхъ кристаллахъ оптическая ось, одно изъ направлений колебаній и нормаль къ волнѣ лежатъ въ одной плоскости. Поэтому, если проведемъ плоскость черезъ построенное нами направленіе колебаній и центръ сферы, то она пройдетъ и черезъ оптическую ось и пересѣчетъ сферу по одному изъ меридіановъ, проходящихъ черезъ выходы (проекціи) оптической оси. Направленіе колебанія будетъ касательной къ этому меридіану. Другое направленіе колебанія, будучи перпендикулярно къ первому, будетъ касательной къ параллели, пересѣкающейся въ данной точкѣ съ меридіаномъ.

Такимъ образомъ системой меридіановъ и параллелей, построенныхъ на сферѣ, принявъ выходы оптической оси за полюсы, вполне опредѣлятся направленія колебаній. Такъ какъ направленіе касательной совпадаетъ съ направленіемъ кривой въ

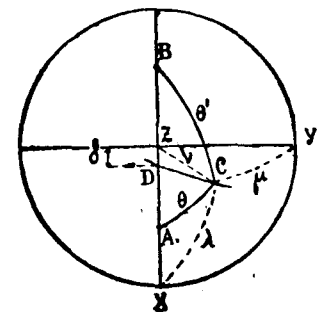
точкѣ касанія, то можно также сказать, что искомыя направленія колебаній совпадаютъ съ направленіями меридіана и параллели, проходящихъ черезъ данную точку, отвѣчающую направленію распространенія свѣтовой волны. Очевидно, что въ оптически положительныхъ кристаллахъ меридіаны отвѣчаютъ положенію n'_g сѣченія индикатриссы, перпендикулярнаго къ направленію распространенія волнъ, а въ оптически отрицательныхъ, наоборотъ n'_p . Условившись называть положительной ту систему кривыхъ, которая отвѣчаетъ n'_g и отрицательной ту, которая n'_p , можно сказать, что знакъ кристалла одинаковъ со знакомъ меридіановъ. Система меридіановъ и параллелей, какъ видно, вполне опредѣленно, однозначно и очень наглядно изображаетъ расположеніе колебаній въ плоскихъ волнахъ, проходящихъ въ различныхъ направленіяхъ въ одноосномъ кристаллѣ.

Для двуосныхъ кристалловъ, примѣняя построеніе Френеля, найдемъ направленіе колебаній такимъ образомъ. Соединивъ дугами большихъ круговъ данную точку, отвѣчающую опредѣленному направленію распространенія плоскихъ волнъ, съ проекціями оптическихъ осей, раздѣлимъ уголъ между этими дугами пополамъ. Касательныя къ тѣмъ дугамъ большихъ круговъ, которыя будутъ служить биссектрисами, и будутъ направленіями колебаній.

На плоскости, соединяя прямыми точку эллипса съ его фокусами и проводя биссектрисы полученнаго угла, будемъ имѣть въ нихъ касательную и нормаль къ эллипсу. На сферѣ существуютъ шаровые эллипсы. Шаровой эллипсъ есть кривая, удовлетворяющая условію, что сумма дуговыхъ разстояній каждой ея точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ сферы (фокусовъ кривой)—величина постоянная, и обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что касательныя къ дугамъ большихъ круговъ, дѣлящими пополамъ углы между дугами, соединяющими фокусы съ точкой кривой, будутъ касательной и нормалью къ кривой т. е. удовлетворяютъ только что указанному построенію Френеля.

Привожу доказательство этой важной теоремы. (Фиг. 2).

Фиг. 2.



Начало координатъ въ центрѣ сферы. А и В данные фокусы кривой [выходы оптическихъ осей на сферѣ]. Координатную ось Z совмѣщаю съ биссектрисою угла АОВ, а ось Y съ перпендикуляромъ къ плоскости АОВ. Дана точка кривой С. Разстояніе ея отъ фокусовъ [проекцій оптическихъ осей] А и В назовемъ ϑ и ϑ' . Сумма $\vartheta + \vartheta' = 2\alpha$ — величина постоянная. Дуга АВ = 2V. Дуга CD — одна изъ биссектрисъ угла АСВ. Назовемъ этотъ уголъ АСВ — 2С дугу DC — p и дугу ZD — δ . Радиусъ сферы назову R, такъ что уравненіе ея:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Очевидно

$$\cos \lambda = \frac{x}{R}, \cos \mu = \frac{y}{R}, \cos \nu = \frac{z}{R}$$

Изъ треугольниковъ AZC и AXC слѣдуетъ:

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \cos \vartheta \sin V + \sin \vartheta \cos V \cos A \\ \cos \nu &= \cos \vartheta \cos V - \sin \vartheta \sin V \cos A; \end{aligned}$$

отсюда найдемъ

$$\cos \vartheta = \cos \lambda \sin V + \cos \nu \cos V$$

и подобнымъ же образомъ изъ треугольниковъ ZCB и ZBX

$$\cos \vartheta' = -\cos \lambda \sin V + \cos \nu \cos V$$

Изъ послѣднихъ двухъ равенствъ слѣдуетъ, что:

$$\cos \lambda = \frac{\cos \vartheta - \cos \vartheta'}{2 \sin V} \text{ и } \cos \nu = \frac{\cos \vartheta + \cos \vartheta'}{2 \cos V}$$

По условію $\vartheta + \vartheta' = 2\alpha$, слѣдовательно $\vartheta' - \vartheta = 2(\alpha - \vartheta)$ и потому

$$\cos \lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin V} \sin(\alpha - \vartheta); \cos \nu = \frac{\cos \alpha}{\cos V} \cos(\alpha - \vartheta) \dots (1)$$

Исключая отсюда $(\alpha - \vartheta)$

$$\sin^2(\alpha - \vartheta) = \frac{x^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha}; \cos^2(\alpha - \vartheta) = \frac{z^2}{R^2} \cdot \frac{\cos^2 V}{\cos^2 \alpha}$$

складывая получаемъ:

$$\frac{x^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha} + \frac{z^2}{R^2} \cdot \frac{\cos^2 V}{\cos^2 \alpha} = 1 \dots (2)$$

Отсюда между прочимъ видимъ, что кривая можетъ быть разсматриваема, какъ пересѣченіе сферы съ эллиптическимъ цилиндромъ [урав. 2]. Соединяя всѣ точки кривой съ началомъ координатъ [центромъ], получу конусъ, уравненіе котораго:

$$x^2 \left(\frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) - y^2 + z^2 \left(\frac{\cos^2 V}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = 0 \dots (3)$$

[Оно получается исключеніемъ R изъ уравненія 2 и уравненія сферы].

Для того, чтобы одна изъ касательныхъ къ сферѣ прямыхъ была касательной къ разсматриваемой кривой, очевидно, достаточно и необходимо, чтобы плоскость, проходящая чрезъ эту прямую, была касательна къ полученному конусу. Если уравненіе этой плоскости:

$$A \xi + B \eta + C \zeta = 0$$

и координаты точки касанія x_1, y_1, z_1 , то условіе касанія будетъ:

$$A : B : C = x_1 \left(\frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) : -y_1 : z_1 \left(\frac{\cos V}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \dots (4)$$

Если мы теперь докажемъ, что эта касательная плоскость перпендикулярна къ биссектрисѣ CD, то тѣмъ самымъ докажемъ справедливость нашей теоремы. Но уравненіе биссектрисы CD можно найти, какъ уравненіе плоскости, проходящей чрезъ начало и двѣ точки С (x_1, y_1, z_1) и D (x_2, y_2, z_2). Для нахождения координатъ послѣдней (x_2, y_2, z_2) можно взять такія соотношенія:

$$\frac{\sin(V + \delta)}{\sin C} = \frac{\sin p}{\sin B}; \frac{\sin(V - \delta)}{\sin C} = \frac{\sin p}{\sin A}; \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta}$$

откуда:

$$\frac{\sin(V + \delta)}{\sin(V - \delta)} = \frac{\sin \vartheta'}{\sin \vartheta}$$

и затѣмъ:

$$\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{\sin V}{\cos V} \cdot \frac{\sin \vartheta' - \sin \vartheta}{\sin \vartheta' + \sin \vartheta} = \frac{\sin V}{\cos V} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos(\alpha - \vartheta)} \dots (5)$$

а на основаніи уравненія |1|:

$$\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\cos(\alpha - \vartheta)} = \frac{\cos \lambda}{\cos \nu} \cdot \frac{\sin V \cos \alpha}{\cos V \sin \alpha} = \frac{x_1}{z_1} \cdot \frac{\sin V \cos \alpha}{\cos V \sin \alpha}$$

Но такъ какъ

$$\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{x_2}{y_2} \text{ и } y_2 = 0,$$

то изъ уравненія |5| и слѣдующаго за нимъ вытекаетъ что

$$x_2 : y_2 : z_2 = x_1 \sin^2 V \cos^2 \alpha : y_1 \cdot 0 : z_1 \cos^2 V \sin^2 \alpha$$

Значитъ уравненіе плоскости DC будетъ [въ видѣ детерминанта].

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 \sin^2 V \cos^2 \alpha & y_1 \cdot 0 & z_1 \cos^2 V \sin^2 \alpha \end{vmatrix} = 0 \dots (6)$$

Для перпендикулярности плоскостей

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0 \text{ и } A'\xi + B'\eta + C'\zeta = 0$$

надо, чтобы $AA' + BB' + CC' = 0$, т. е. въ данномъ случаѣ надо, чтобы мы получили тождественно нуль послѣ подстановки въ только что найденное уравнение [6] вмѣсто (ξ, η, ζ) величинъ, пропорциональныхъ коэффициентамъ A, B и C , которыя даются ур. [4]; Сдѣлаемъ подстановку:

$$\begin{vmatrix} x_1 \left(\frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) & -y_1 & z_1 \left(\frac{\cos^2 V}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x, \sin^2 V \cos^2 \alpha & 0 & z, \cos^2 V \sin^2 \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= -x_1 y_1 z_1 \begin{vmatrix} \frac{1}{\left(\frac{\sin^2 V}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) - 1} & 1 \\ \frac{1}{\sin^2 V \cos^2 \alpha} & 0 \\ \frac{1}{\cos^2 V \sin^2 \alpha} & 1 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая послѣдній опредѣлитель, получаю:

$$-\cos^2 V \sin^2 \alpha + \cos^2 V \sin^2 V - \sin^2 V \cos^2 \alpha - \sin^2 V \cos^2 V + \cos^2 V \sin^2 \alpha + \sin^2 V \cos^2 \alpha = 0.$$

Слѣдовательно теорема доказана.

Шаровые эллипсы съ фокусами въ проекціяхъ осей на основаніи этого изображаютъ направленія колебаній въ различныхъ плоскихъ волнахъ, проходящихъ по разнымъ направленіямъ двуосный кристаллъ, совершенно такъ же, какъ въ одноосныхъ это достигается системами меридіановъ и параллелей.

Очевидно, что на сферѣ существуетъ двѣ системы такихъ эллипсовъ. Если оптическія оси AA' и BB' , (см. фиг. 5), то фокусами одной служатъ A и B (или A' и B') а фокусами другой A и B' (или A' и B). Эллипсы той и другой пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Если уравненіе какого либо изъ эллипсовъ съ фокусами A и B по предыдущему будетъ $\mathfrak{S} + \mathfrak{S}' = 2\alpha$, то въ точкѣ $(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}')$ онъ пересѣкается съ эллипсомъ, принадлежащимъ другой системѣ, уравненіе котораго

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}'_1 = \mathfrak{S} + (180^\circ - \mathfrak{S}') = 180^\circ - 2(\alpha - \mathfrak{S}).$$

Тѣ эллипсы, которые пересѣкаютъ плоскость оптическихъ осей ($n_g n_p$) въ остромъ углѣ оптическихъ осей, называются меридіанальными; пересѣкающіе же ее въ тупомъ углѣ—экваторіальными. При уменьшеніи угла оптическихъ осей $2V$ до нуля

меридіанальные эллипсы обращаются въ меридіаны, экваторіальные—въ параллели. Когда $2V = 90^\circ$, система меридіанальныхъ эллипсовъ становится тождественной съ системой экваторіальныхъ; нормаль къ плоскости оптическихъ осей (n_m) дѣлается четвертой осью симметріи системы этихъ кривыхъ ¹⁾.

Вообще же эта система кривыхъ обладаетъ тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметріи, совпадающими съ $n_g n_p, n_g n_m$ и $n_m n_p$.

Плоскостямъ симметріи отвѣчаютъ особые эллипсы системъ, въ нихъ лежащіе. Для нихъ можно принять такія названія: 1) экватора—для большого круга, перпендикулярнаго острой биссектрисѣ угла оптическихъ осей; 2) главнаго осевого меридіана—для большого круга, проходящаго чрезъ оптическія оси (пл. $n_g n_p$); 3) главнаго поперечнаго меридіана—для большого круга, плоскость котораго перпендикулярна двумъ первымъ.

Главный осевой меридіанъ состоитъ изъ двухъ существенно различныхъ частей: дуги въ остромъ углѣ оптическихъ осей, которая принадлежитъ системѣ экваторіальныхъ эллипсовъ, и дуги въ тупомъ углѣ осей, принадлежащей системѣ меридіанальныхъ эллипсовъ. Въ эти дуги эллипсы превращаются, когда параметръ α , уменьшаясь, дѣлается равнымъ V .

Вообще сферическіе эллипсы не проходятъ черезъ оптическія оси; поэтому, если какой либо изъ нихъ въ нѣкоторой точкѣ отвѣчаетъ направленію n'_k , то и во всѣхъ остальныхъ точкахъ онъ будетъ отвѣчать n'_g , такъ какъ, подвигаясь отъ одной его точки къ другой, мы въ силу непрерывнаго измѣненія сѣченій индикатриссы не можемъ перейти отъ n'_g къ n'_p , не пройдя чрезъ круговое сѣченіе (— оптическую ось), что не возможно. Принявъ это во вниманіе, нетрудно вывести такое различіе между двуосными кристаллами оптически положительными и оптически отрицательными.

Въ кристаллахъ положительныхъ

меридіанальные эллипсы отвѣчаютъ . . . n'_g ,
экваторіальные n'_p ;
въ кристаллахъ отрицательныхъ, наоборотъ,
меридіанальные эллипсы отвѣчаютъ . . . n'_p ,
экваторіальные n'_g .

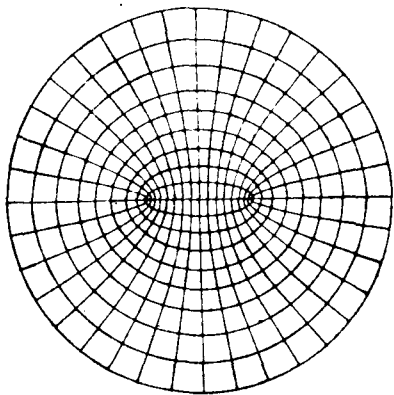
¹⁾ Отсюда, какъ слѣдствіе, вытекаетъ слѣдующее любопытное свойство: если на универсальномъ столикѣ микроскопа привести одну изъ оптическихъ осей такого кристалла въ совмѣщеніе съ осью I и послѣднюю повернуть на 45° къ главнымъ сѣченіямъ николей, то получается темнота, сохраняющаяся при наклонѣ около оси I . Это можно и прямо вывести изъ теоремы Френеля.

См. А. Заварицкій «Одинъ изъ способовъ опредѣл. оптич. знака. Эти Записки Т. III. стр. 398.

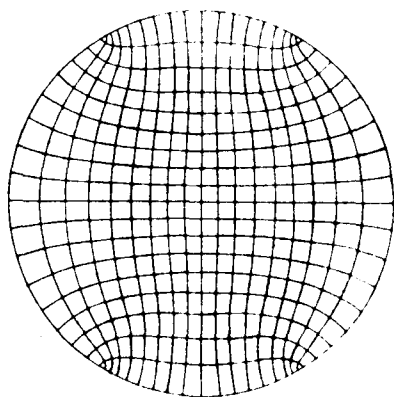
Т. е. подобно тому какъ въ одноосныхъ кристаллахъ знакъ отвѣчаетъ знаку меридіанальныхъ эллипсовъ.

На прилагаемыхъ чертежахъ (фиг. 3 а и б) представлена система сферическихъ эллипсовъ для случая $2V = 60^\circ$ въ стереографической проекціи на

Фиг. 3а.



Фиг. 3б.



плоскость экватора и главнаго осевого меридіана. (— плоскость оптическихъ осей). Стереографическія проекціи системъ сферическихъ эллипсовъ на какую-либо плоскость мы будемъ называть стереограммой направленийъ колебаній для этой плоскости.

Представленіе о сферическихъ эллипсахъ мы находимъ въ курсѣ оптики Бера ¹⁾ и затѣмъ его съ успѣхомъ примѣнилъ Бекке ²⁾ для объясненія яв-

¹⁾ А. Beer—Einleitung in die höhere. Optik, 2 Aufl. 1882.

²⁾ Смотр. подстр. примѣчаніе выше на стр. 001.

ленийъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ. Изъ изложеннаго выше видно, какимъ образомъ можно притти къ понятію объ этихъ кривыхъ, развивая основныя положенія теодолитнаго метода. Съ помощью такого геометрическаго представленія измѣненія въ направленіяхъ колебаній съ переходомъ отъ одного направленія распространенія волны къ другому получаютъ вполне отчетливое выраженіе.

В. Величина $n'_g - n'_p$ для различныхъ сѣченій.

Перейдемъ теперь къ другому элементу, характеризующему направленіе въ кристаллѣ—къ двупреломленію $n'_g - n'_p$ перпендикулярнаго ему сѣченія.

Если обратиться къ изображенію направленийъ точками сферы, какъ это уже было примѣнено выше, то каждая точка такой сферы, изображая вполне определенное направленіе распространенія плоскихъ волнъ, отвѣчаетъ определенному значенію $n'_g - n'_p$. Соединяя между собою точки съ одинаковымъ значеніемъ $n'_g - n'_p$, мы получимъ на сферѣ рядъ „кривыхъ равнаго двупреломленія“. Система всѣхъ такихъ кривыхъ совершенно определенно и наглядно разрѣшаетъ поставленную задачу.

Для определенія двупреломленія произвольнаго сѣченія въ общемъ случаѣ двуоснаго кристалла мы имѣемъ, какъ извѣстно, такую формулу:

$$\frac{1}{(n'_p)^2} - \frac{1}{(n'_g)^2} = \left(\frac{1}{n_p^2} - \frac{1}{n_g^2} \right) \sin \mathfrak{S} \sin \mathfrak{S}'$$

Здѣсь n'_g и n'_p —оси эллипса разсматриваемаго сѣченія, n_g и n_p —наименьшая и наибольшая оси эллипсоида, \mathfrak{S} и \mathfrak{S}' —углы, образуемые перпендикуляромъ къ разсматриваемому сѣченію эллипсоида съ оптическими осями.

Какъ показалъ Малляръ, для минераловъ эта формула съ достаточной точностью можетъ быть замѣнена болѣе простою:

$$n'_g - n'_p = (n_g - n_p) \sin \mathfrak{S} \sin \mathfrak{S}',$$

которая для минераловъ одноосныхъ принимаетъ такой видъ:

$$n'_g - n'_p = (n_g - n_p) \sin^2 \mathfrak{S}.$$

Эти двѣ формулы мы и положимъ въ основу дальнѣйшихъ выводовъ. Онѣ представляютъ ничто иное, какъ уравненія кривыхъ равнаго двупреломленія для данныхъ параметровъ: $n_g - n_p$ и $n'_g - n'_p$.

Выводъ основнаго уравненія для двупреломленія произвольнаго сѣченія можно найти, напримѣръ, въ курсѣ Дюпарка и Пирса, гдѣ этотъ выводъ основывается

на теоремѣ Аполлонія. Можно, и даже это будетъ еще проще, исходить изъ ур. поверхности нормальныхъ скоростей:

$$\frac{\cos^2 \lambda}{a^2 - \rho^2} + \frac{\cos^2 \mu}{b^2 - \rho^2} + \frac{\cos^2 \nu}{c^2 - \rho^2} = 0 \dots (A).$$

Въ самомъ дѣлѣ, задавшись какими либо опредѣленными значеніями λ , μ и ν , мы получаемъ изъ (A) биквадратное уравненіе относительно ρ , что ясно видно, преобразовавъ его въ форму

$$\rho^4 - [\cos^2 \lambda (b^2 + c^2) + \cos^2 \mu (a^2 + c^2) + \cos^2 \nu (a^2 + b^2)] \rho^2 + (\cos^2 \lambda \cdot b^2 c^2 + \cos^2 \mu \cdot a^2 c^2 + \cos^2 \nu \cdot a^2 b^2) = 0.$$

Четыре корня этого уравненія ρ_1 , ρ_2 и $-\rho_1$, $-\rho_2$ есть ничто иное, какъ величины, обратныя искомымъ n'_g и n'_p . Такимъ образомъ:

$$n'_g = \frac{1}{\rho_1} \text{ и } n'_p = \frac{1}{\rho_2}.$$

По свойству корней квадратнаго уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(n'_g)^2} + \frac{1}{(n'_p)^2} &= (b^2 + c^2) \cos^2 \lambda + (a^2 + c^2) \cos^2 \mu + \\ &\quad + (a^2 + b^2) \cos^2 \nu \\ \frac{1}{(n'_g)^2 (n'_p)^2} &= b^2 c^2 \cos^2 \lambda + a^2 c^2 \cos^2 \mu + a^2 b^2 \cos^2 \nu \end{aligned} \right\} \dots (B)$$

Дальнѣйшій выводъ одинаковъ съ помѣщеннымъ въ курсѣ Дюпарка и Пирса. Привожу его здѣсь сокращенно. Какъ мы видѣли уже (см. выводъ основного свойства сферическихъ эллипсовъ).

$$\cos \lambda = \frac{\cos \mathfrak{D} - \cos \mathfrak{D}'}{2 \sin V} \text{ и } \cos \nu = \frac{\cos \mathfrak{D} + \cos \mathfrak{D}'}{2 \cos V}$$

кромѣ того:

$$\cos^2 V = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}; \quad \sin^2 \nu = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \cos^2 \lambda &= \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{(\cos \mathfrak{D} - \cos \mathfrak{D}')^2}{4}; \\ \cos^2 \nu &= \frac{a^2 - c^2 (\cos \mathfrak{D} + \cos \mathfrak{D}')^2}{b^2 - c^2 \cdot 4}. \end{aligned}$$

Послѣ подстановки и приведенія ур. В обращаются въ

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n'_p)^2} + \frac{1}{(n'_g)^2} &= a^2 + c^2 + (a^2 - c^2) \cos \mathfrak{D} \cos \mathfrak{D}' \\ \frac{1}{(n'_p)^2 (n'_g)^2} &= a^2 c^2 + \frac{a^2 - c^2}{4} (\cos^2 \mathfrak{D} + \cos^2 \mathfrak{D}') + \\ &\quad + \frac{a^4 - c^4}{2} \cos \mathfrak{D} \cos \mathfrak{D}'. \end{aligned}$$

Взявъ тождество:

$$\left[\frac{1}{(n'_p)^2} - \frac{1}{(n'_g)^2} \right]^2 = \left[\frac{1}{(n'_p)^2} + \frac{1}{(n'_g)^2} \right]^2 - \frac{4}{(n'_p)^2 (n'_g)^2},$$

сдѣлавъ въ немъ постановку только что найденныхъ значеній

$$\frac{1}{(n'_p)^2} + \frac{1}{(n'_g)^2} \text{ и } \frac{1}{(n'_p)^2 (n'_g)^2}$$

и замѣтивъ, что

$$1 - \cos^2 \mathfrak{D} - \cos^2 \mathfrak{D}' + \cos^2 \mathfrak{D} \cos^2 \mathfrak{D}' = \sin^2 \mathfrak{D} \sin^2 \mathfrak{D}',$$

послѣ приведенія получимъ

$$\left[\frac{1}{(n'_p)^2} - \frac{1}{(n'_g)^2} \right]^2 = (a^2 + c^2) + (a^2 - c^2)^2 (\sin^2 \mathfrak{D} \sin^2 \mathfrak{D}' - 1) - 4a^2 c^2$$

и далѣе

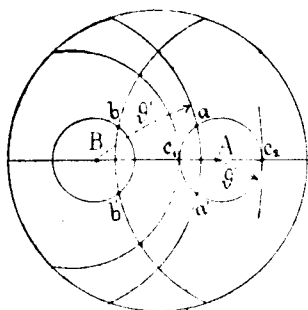
$$\frac{1}{(n'_p)^2} - \frac{1}{(n'_g)^2} = \left(\frac{1}{n_p^2} - \frac{1}{n_g^2} \right) \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{D}',$$

что и требовалось доказать.

Изслѣдуемъ теперь измѣненія формы кривыхъ равнаго двупреломленія, заданныхъ уравненіемъ $n'_g - n'_p = (n_g - n_p) \sin \mathfrak{D} \sin \mathfrak{D}'$ въ зависимости отъ измѣненія величины параметра $n'_g - n'_p$.

Представивъ это уравненіе въ видѣ $\sin \vartheta \sin \vartheta' = k$, будемъ придавать k различныя значенія. Для каждаго изъ этихъ значеній, задаваясь опредѣленной величиной одного изъ угловъ ϑ , найдемъ значеніе другого угла ϑ' по формулѣ $\vartheta' = \arcsin \frac{k}{\sin \vartheta}$. Описывая на сферѣ вокругъ оптическихъ осей малые круги радіусами ϑ и ϑ' , въ пересѣченіи ихъ получимъ точки изслѣдуемой кривой. Вообще такихъ точекъ пересѣченія получается четыре (фиг. 4) a и a^1

Фиг. 4.



на кругѣ радіуса ϑ около оси A и b и b^1 на кругѣ того же радіуса около оси B . Точки эти будутъ расположены, очевидно, симметрично относительно осей оптического эллипсоида ng , nm и nr . Въ особыхъ случаяхъ, именно, когда круги радіусовъ ϑ и ϑ' становятся касательными, получаютъ только двѣ точки c_1 и c_2 . Точки касанія лежатъ на меридіанѣ оптическихъ осей. Будучи точками изслѣдуемой кривой, онѣ поэтому являются точками пересѣченія этой кривой съ меридіаномъ оптическихъ осей. При построеніи точекъ касанія слѣдуетъ различать случаи внутренняго касанія (точка c_2) и внѣшняго (c_1). Въ первомъ случаѣ $\vartheta' = \vartheta = 2V$; во второмъ $\vartheta + \vartheta' = 2V$; или вообще условіе для встрѣчи кривой равнаго двупреломленія съ меридіаномъ оптическихъ осей выражается равенствомъ:

$$\vartheta' = 2V \mp \vartheta$$

Знакъ — относится къ случаю внѣшняго касанія, знакъ + къ случаю внутренняго.

Изъ уравненія кривой, $\sin \vartheta \sin \vartheta' = k$, получимъ:

$$\sin \vartheta \sin (2V \mp \vartheta) = k$$

или

$$\sin 2V \cos \vartheta \mp \cos 2V \sin \vartheta = \frac{k}{\sin \vartheta}$$

Замѣняя $\cos \vartheta$ чрезъ $\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}$ и освобождаясь отъ радикала, получимъ:

$$\sin^2 2V (1 - \sin^2 \vartheta) = \frac{k^2}{\sin^2 \vartheta} + \sin^2 \vartheta \cos^2 2V \pm 2k \cos 2V$$

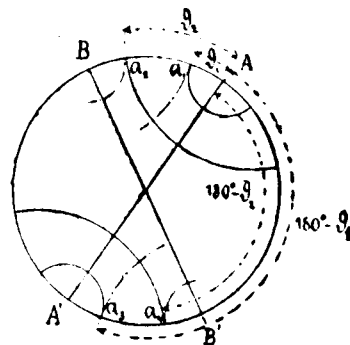
или

$$\sin^4 \vartheta + (\pm 2k \cos 2V - \sin^2 2V) \sin^2 \vartheta + k^2 = 0.$$

или

Отсюда видно, что существуютъ четыре значенія $\sin \vartheta$, попарно равныя по абсолютной величинѣ и съ противоположными знаками, т. е. соответствующія значенія ϑ будутъ ϑ_1 ; ϑ_2 ; $180 - \vartheta_1$, и $180 - \vartheta_2$. Это отвѣчаетъ на сферѣ четыремъ точкамъ для случая внѣшняго касанія и четыремъ для внутренняго. На фиг. 5 изображены четыре точки ($a_1 a_2 a_3 a_4$) внѣшняго касанія. AA' и BB' —оптическія оси.

Фиг. 5.



Изслѣдуемъ полученное уравненіе. Для вещественности корней его надо, чтобы

$$\frac{(\pm 2k \cos 2V - \sin^2 2V)^2}{4} - k^2 \geq 0$$

или

$$(\pm k \cos 2V - \frac{1}{2} \sin^2 2V - k) \times (\pm k \cos 2V - \frac{1}{2} \sin^2 2V + k) \geq 0$$

Знакъ = имѣеть мѣсто въ случаѣ равныхъ корней $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2$. Знакъ + въ первомъ членѣ каждаго изъ выраженій, стоящихъ въ скобкахъ, въ случаѣ внѣшняго касанія,—въ случаѣ внутренняго. Разберемъ оба эти случая отдѣльно:

1) Внѣшнее касаніе. Необходимо, чтобы

$$[-k(1 - \cos 2V) - \frac{1}{2} \sin^2 2V] \times$$

$$\times [k(1 + \cos 2V) - \frac{1}{2} \sin^2 2V] \geq 0,$$

или

$$(-k 2 \sin^2 2V - \frac{1}{2} \sin^2 2V) \times$$

$$\times (k 2 \cos^2 V - \frac{1}{2} \sin^2 2V) \geq 0.$$

Такъ какъ $k > 0$, то первый множитель отрицателенъ, а потому должно быть

$$k \cdot 2 \cos^2 V - \frac{1}{2} \sin^2 2V \leq 0$$

или

$$k \cos^2 V - \sin^2 V \cos^2 V \leq 0$$

и окончательно

$$k \leq \sin^2 V$$

2) Внутреннее касаніе. Подобно предыдущему найдемъ условіе касанія:

$$[-k(1 + \cos 2V) - \frac{1}{2} \sin^2 2V] \times$$

$$\times [k(1 - \cos 2V) - \frac{1}{2} \sin^2 2V] \geq 0$$

или

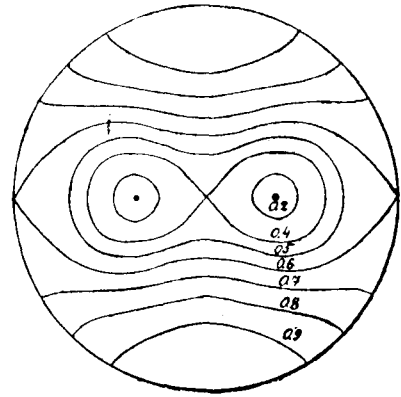
$$k 2 \sin^2 V - \frac{1}{2} \sin^2 2V \leq 0;$$

откуда

$$k \leq \cos^2 V.$$

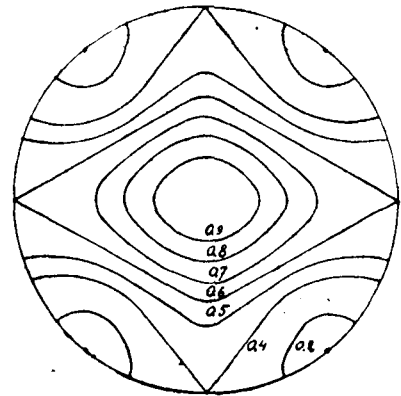
Послѣ этихъ замѣчаній нетрудно составить представленіе о формѣ кривыхъ равнаго двупреломленія¹⁾. Когда k очень мало, то изъ ур. $\sin \mathfrak{S} \sin \mathfrak{S}' = k$ слѣдуетъ, что или $\sin \mathfrak{S}$, или $\sin \mathfrak{S}'$ малъ, и, значить, точки кривой близки (фиг. 6) къ А или В—кривая

Фиг. 6а.



состоить изъ отдѣльныхъ замкнутыхъ маленькихъ колецъ вокругъ каждой изъ оптическихъ осей. По мѣрѣ того какъ k увеличивается, эти кольца рас-

Фиг. 6б.



ширяются, и пока $k < \sin^2 V$, кривая пересѣкаетъ меридіанъ оптическихъ осей съ обѣихъ сторонъ каждой оси въ разстояніяхъ \mathfrak{S}_1 и \mathfrak{S}_2 , опредѣляющихся изъ найденнаго выше уравненія. Кольца кривой остаются отдѣльно окружающими каждую ось (фиг. 6

¹⁾ см. Дюпарка и Пирса 1. с. стр. 224—226

кривая 0,2). Когда $k = \sin^2 V$, то $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = V$. Какъ видно изъ фиг. 5 точки a_1 и a_2 сливаются въ одну, т. о. кольца расширяются настолько, что соприкасаются между собой въ точкѣ, отвѣчающей острой биссектрисѣ угла оптическихъ осей. Кривая имѣетъ лемнискатоподобную форму (0,4 на фиг. 6). При дальнѣйшемъ увеличеніи k уже не можетъ имѣть мѣста существованію точекъ кривой на меридіанѣ оптическихъ осей въ остромъ углѣ между осями (— для случая вѣшняго касанія фиг. 4 имѣтъ двѣ ствительныхъ корней), но пока $k < \cos^2 V$, имѣются точки кривой на меридіанѣ оптическихъ осей въ тупомъ углѣ между ними. Лемнискатоподобныя кривыя превращаются въ выгнутое бисквитообразной формы кольцо, охватывающее объ оси (0,5 фиг. 6). Когда k станетъ равнымъ $\cos^2 V$, точки пересѣченія колецъ съ меридіаномъ оптическихъ осей сольются въ точкахъ, отвѣчающихъ тупой биссектрисѣ (кривая 0,6 фиг. 6). При дальнѣйшемъ увеличеніи ни внутреннее, ни вѣшнее касанія не имѣютъ мѣста. Кривая состоитъ изъ отдѣльныхъ частей, замыкающихся внѣ меридіана оптическихъ осей (кривая 0,7--0,9 фиг. 6). На фиг. 6 ¹⁾ изображены кривыя равнаго двупреломленія двуснаго минерала съ $2V = 78^\circ 28'$ въ стереографическихъ проекціяхъ на плоскость перпендикулярную острой биссектрисѣ и на плоскость оптическихъ осей. Впервые такія проекціи были примѣнены Мишель-Леви ²⁾.

Для минераловъ одноосныхъ, какъ это очевидно изъ формулы:

$$n'_g - n'_p = (n_g - n_p) \sin^2 \mathfrak{S},$$

кривыя равнаго двупреломленія обращаются въ рядъ концентрическихъ колецъ, центръ которыхъ отвѣчаетъ оптической оси.

Кривыя равнаго двупреломленія для одноосныхъ и двусныхъ кристалловъ даютъ столь же наглядный способъ изображенія измѣненія величины $n'_g - n'_p$ для различныхъ плоскихъ волнъ, проходящихъ чрезъ кристаллъ, какъ тотъ, который мы имѣли въ сферическиххъ эллипсахъ (и кругахъ для одноосныхъ кристалловъ) для изображенія направленій свѣтовыхъ колебаній.

§ 3. Связь между элементарными плоскими волнами и точками интерференціонной фигуры.

Такимъ образомъ можно опредѣлить для каждого направленія въ кристаллѣ, по которому распространяется плоская волна, главные элементы, характеризующіе распространеніе плоскихъ волнъ: $n'_g - n'_p$ и направленія колебаній, и сравнивать ихъ между собою. Чтобы связать направленія въ кристаллѣ съ точками интерференціонной фигуры, надо рассмотреть, какимъ образомъ послѣдняя образуется, и какимъ образомъ при этомъ свойства плоскихъ волнъ, распространяющихся по опредѣленному направленію, находятъ себѣ выраженіе въ особенностяхъ точки фигуры, коррелятивной этому направленію распространенія плоскихъ волнъ.

Точки интерференціонной фигуры различаются между собой: 1) по цвѣту и 2) по яркости освѣщенія. Цвѣтъ обусловливается разностью хода обѣихъ свѣтовыхъ волнъ, образующихъ данную точку. Что же касается яркости освѣщенія, то она зависитъ отъ угловъ между направленіями колебаній и главными плоскостями никелей; въ частности важны волны, колебанія которыхъ совпадаютъ съ этими плоскостями, и которыя потому гасятся никелями. Отсюда понятно, что для объясненія особенностей интерференціонной фигуры надо разрѣшить три вопроса:

- 1) выяснить геометрическую связь между точкою интерференціонной фигуры и соответствующимъ направленіемъ въ кристаллѣ;
- 2) установить зависимость между двупреломленіемъ въ сѣченіи, перпендикулярномъ соответствующему точкѣ фигуры направленію, и разностью хода волнъ, образующихъ эту точку;
- 3) найти соотношеніе между направленіями колебаній въ плоской волнѣ, проходящей въ кристаллѣ и отвѣчающей данной точкѣ, и въ волнахъ, образующихъ эту точку, т. е. идущихъ отъ нея въ глазъ наблюдателя.

1) *Геометрическая связь между положеніемъ точки въ фигурѣ и направленіемъ въ кристаллѣ ей коррелятивнымъ*, ясна изъ хода лучей при образованіи интерференціонной фигуры (см. рис. 7). Именно: точка ея и направленіе въ кристаллѣ лежатъ въ одной плоскости съ осью микроскопа, и разстояніе точки фигуры отъ центра ея пропорціонально синусу угла наклона къ оси микроскопа направленія распространенія плоской волны по выходѣ ея изъ минерала.

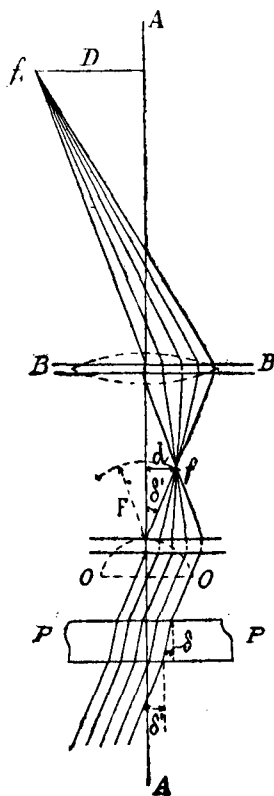
Мы выше изображали направленія въ кристаллѣ

¹⁾ Заимствована изъ курса Дюпаржа и Пирса, стр. 226

²⁾ «Etude sur la détermination des Feldspaths» f. 1. 1894.

въ стереографической проекціи, какъ наиболѣе удобной. Чтобы перейти отъ нея къ изображенію соответствующихъ точекъ интерференціонной фигуры

Фиг. 7.



надо, принявъ во вниманіе показатель преломленія кристалла, перейти къ направленію распространенія волны въ воздухѣ по выходѣ изъ кристалла и затѣмъ отъ стереографической проекціи перейти къ ортогональной. Измѣнится при этомъ только разстояніе каждой точки отъ центра. Если разстояніе стереографической проекціи направленія d_s (радіусъ сферы принимаю = r), то уголъ его съ осью проекціи δ найдется по формулѣ:

$$d_s = r \tan \frac{\delta}{2}$$

По выходѣ въ воздухѣ уголъ δ измѣнится въ δ^1 , такъ что

$$\sin \delta^1 = n \sin \delta$$

гдѣ n — показатель преломленія минерала. Разстояніе ортогональной проекціи отъ центра назовемъ d ; очевидно

$$d = r \sin \delta^1 = r n \sin \delta,$$

но

$$\sin \delta = \frac{2 \tan \frac{\delta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\delta}{2}}$$

значить

$$d = nr \frac{2 d_s}{r^2 + d_s^2}$$

и

$$\frac{d}{d_s} = 2n \cos^2 \frac{\delta}{2}$$

Въ послѣднемъ равенствѣ n можно считать постояннымъ. Мы видимъ, что расположеніе точекъ интерференціонной фигуры тѣмъ болѣе уклоняется отъ подобія расположенію стереографическихъ проекцій соответствующихъ направлений, чѣмъ болѣе предѣлы измѣненія величины δ . Въ обычныхъ условіяхъ наблюденій (сухая система) δ измѣняется въ предѣлахъ отъ 0° до 40° . Соответственно этому $\cos^2 \frac{\delta}{2}$ мѣняется отъ 1 до 0,88. (При масляной иммерсионной системѣ эти предѣлы отъ 1 до 0,8). Отсюда можно заключить, что во многихъ случаяхъ для приближеннаго изслѣдованія явленія съ качественной стороны, можно непосредственно пользоваться стереографической проекціей направлений въ кристаллѣ, какъ приближеннымъ изображеніемъ соответственныхъ точекъ интерференціонной фигуры.

2) Разность хода волнъ, образующихъ точку интерференціонной фигуры, очевидно, та же, какую приобрѣли плоскія волны, пройдя черезъ кристаллъ по соответствующему направленію, такъ какъ на дальнѣйшемъ пути, проходя по изотропнымъ средамъ, эти волны не приобретаютъ другой разности хода. Разность же хода, образующаяся при прохожденіи въ кристаллѣ

$$\Delta = \frac{n'_g - n'_p}{\cos \delta} e,$$

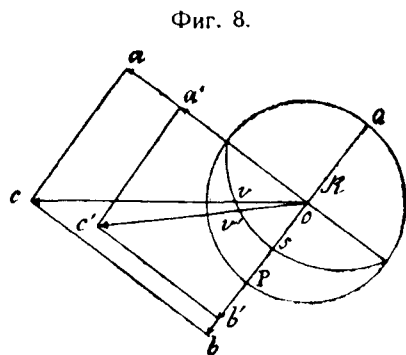
гдѣ e — толщина шлифа и δ — уголъ наклона направленія распространенія волны въ кристаллѣ къ оси микроскопа.

Изъ этого выраженія видно, что изохроматическія кривыя могутъ быть разсматриваемы какъ деформированныя проекціи кривыхъ равнаго двупреломленія.

Точки послѣднихъ, болѣе удаленныя отъ центра, при этомъ сдвигаются въ сторону кривыхъ меньшаго двупреломленія. Однако главнѣйшія свойства кривыхъ равнаго двупреломленія, выведенныя выше, будутъ справедливы и для изохроматъ. Такъ какъ отчетливыя изохроматы наблюдаются въ минералахъ рѣдко и не повергаются обыкновенно изслѣдованію, то я ограничусь однимъ этпмъ указаніемъ на сходство тѣхъ и другихъ кривыхъ.

3) Болѣе важенъ и заслуживаетъ болѣе подробнаго разсмотрѣнія вопросъ о соотношеніи *направленій колебаній въ элементарныхъ плоскихъ волнахъ, проходящихъ въ кристаллѣ, и въ тѣхъ, которыя получаютъ изъ нихъ послѣ преобразованія объективомъ микроскопа, и образуютъ точки интерференціонной фигуры.* Какъ извѣстно, прямолинейно поляризованная волна при иреломленіи испытываетъ новоротъ плоскости поляризаціи.

Напомнимъ сущность этого явленія. Если на преломляющую поверхность, падаетъ плоская волна, распространяющаяся по направленію R (фиг. 8, въ стереографической проекціи; плоскость проекціи при этомъ беру пер-



Фиг. 8.

пендикулярной къ плоскости паденія) съ колебаніемъ совершающимся по v , то колебаніе ея Oc можно разложить на Oa и Ob , находящіяся одно въ плоскости паденія PQ , другое въ перпендикулярной къ ней. При преломленіи часть свѣтовой энергіи будетъ потеряна черезъ отраженіе, при чемъ эта потеря будетъ неодинакова для колебаній Oa и Ob ,—именно для Oa она будетъ больше. Амплитуды колебаній преломленныхъ волнъ будутъ Oa' и Ob' , а равнодѣйствующее колебаніе— Oc' . Какъ ясно изъ

чертежа фиг. 8 уголъ, образуемый направленіемъ колебанія съ плоскостью паденія ($v'S$), послѣ преломленія будетъ меньше, чѣмъ ($v'S$) до него. Другими словами, плоскость поляризаціи повернется, удаляясь отъ плоскости паденія.

Если уголъ между плоскостью поляризаціи падающей волны и плоскостью паденія равенъ α , уголъ паденія φ , уголъ преломленія ψ , то уголъ γ между плоскостью поляризаціи преломленной волны и плоскостью паденія, опредѣляется изъ уравненія ¹⁾

$$\tan \gamma = \tan \alpha \frac{1}{\cos (\varphi - \psi)}$$

При многократномъ преломленіи:

$$\tan \gamma = \tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos (\varphi_1 - \psi_1) \cos (\varphi_2 - \psi_2) \dots \cos (\varphi_n - \psi_n)}$$

очевидно $\gamma > \alpha$. Называя чрезъ ω и η углы, образованные съ плоскостью паденія направленіями колебаній до и послѣ преломленія, мы можемъ написать послѣднюю формулу такъ:

$$\cot \eta = \cot \omega \frac{1}{\cos (\varphi_1 - \psi_1) \cos (\varphi_2 - \psi_2) \dots \cos (\varphi_n - \psi_n)},$$

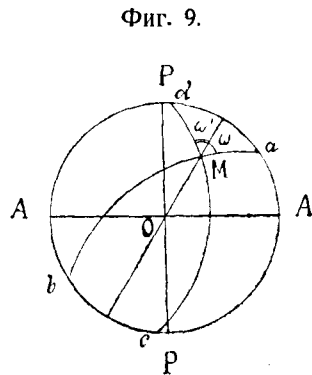
потому что вслѣдствіе перпендикулярности колебаній къ плоскости поляризаціи $\alpha = 90^\circ - \omega$ и $\gamma = 90^\circ - \eta$.

Если бы такого поворота плоскости поляризаціи не происходило, т. е. если бы уголъ γ равнялся α , то углы между главными сѣченіями николей и свѣтовыми колебаніями въ волнахъ, прошедшихъ объективъ и далѣе распространяющихся отъ каждой изъ точекъ интерференціонной фигуры, нашлись бы очень просто изъ стереограммы направленій колебаній.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть M (фиг. 9) точка стереограммы направленій колебаній, отвѣчающая разсматриваемой точкѣ интерференціонной фигуры. Проведемъ черезъ M дуги большихъ круговъ касательныя къ кривымъ стереограммы. Это будутъ взаимно перпендикулярныя дуги ab и cd . Проекція плоскости паденія—діаметръ OM . Углы, образуемые направленіями колебаній съ плоскостью паденія, измѣряются углами между дугою ab и діаметромъ OM и дугою

1) Выводъ этой формулы см. Курсъ Физики Хвольсона т. II стр. 565—572.

cd съ тѣмъ же діаметромъ. По свойству стереографической проекціи эти углы сохраняютъ свою величину и на проекціи, а также сохраняется и уголъ между проекціей плоскости паденія съ глав-



ными сѣченіями николей. Поэтому, проводя въ точкѣ М касательныя къ дугамъ *ab* и *cd* или, все равно, къ кривымъ стереограммы направлений колебаній, мы непосредственно можемъ измѣрить углы между главными сѣченіями николей и свѣтовыми колебаніями какъ въ волнахъ, проходящихъ внутри кристалла, такъ и въ точкахъ интерференціонной фигуры.

Вслѣдствіе поворота плоскости поляризаціи это простое соотношеніе не будетъ сохраняться, и отклоненія будутъ тѣмъ больше, чѣмъ больше уголъ ω и чѣмъ больше $\varphi - \psi$, т. е. чѣмъ болѣе наклонено къ оси микроскопа направленіе распространенія соответственной волны въ кристаллѣ или, другими словами, чѣмъ дальше точки интерференціонной фигуры отъ центра.

Углы между колебаніями въ каждой изъ двухъ распространяющихся по данному направленію волнъ будутъ послѣ преломленія уже не прямыя, а косые. При этомъ плоскость паденія будетъ заключаться въ остромъ углѣ между направленіями колебаній.

Это ясно изъ того, что при преломленіи направленія колебаній приближаются къ плоскости паденія. (Плоскости поляризаціи, напротивъ, удаляются). Попытка опредѣлить количественно отклоненія направлений колебаній по приведенной выше формулѣ встрѣчаетъ почти непреодолимая затрудненія.

Для этого надо знать всѣ $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n, \psi_1, \psi_2 \dots \psi_n$. Но для каждой системы объектива эти величины различны, и явленіе получается весьма сложнымъ.

Однако, чтобы оцѣнить его окончательные результаты, можно воспользоваться такимъ простымъ опытомъ. Установимъ микроскопъ на сходящейся свѣтъ, но не помѣстимъ между конденсоромъ и объективомъ никакого минерала. Поле зрѣнія, хотя и будетъ темнымъ, но не вполнѣ одинаково: по краямъ его, на концахъ діагональнаго діаметра (т. е. расположеннаго подъ угломъ 45° къ главнымъ сѣченіямъ пиколей) замѣчается слабое просвѣтленіе. Это зависитъ именно отъ того, что послѣ ряда преломленій въ конденсорѣ и объективѣ плоскость поляризаціи вышедшей изъ поляризатора волны, уже не будетъ здѣсь перпендикулярной къ плоскости поляризаціи анализатора.

Нетрудно понять, почему просвѣтленіе всего сильнѣе по концамъ діагональнаго діаметра. Оно всего сильнѣе тамъ, гдѣ $\gamma - \alpha$ достигаетъ максимальнаго значенія но $tg \gamma = k tg \alpha$, гдѣ

$$k = \frac{1}{\cos(\varphi_1 - \psi_1) \cos(\varphi_2 - \psi_2) \dots \cos(\varphi_n - \psi_n)}$$

Наибольшее значеніе k имѣетъ при наибольшихъ значеніяхъ $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n$, т. е. по краямъ поля зрѣнія. Сравнивая же разныя точки края поля зрѣнія и считая здѣсь k_{max} постояннымъ, мы видимъ, что $\gamma - \alpha$ мѣняется для нихъ въ зависимости отъ α . Найдёмъ то значеніе α , при которомъ абсолютное значеніе $\gamma - \alpha$ достигаетъ максимальной величины:

$$\gamma = \arctg(k \tan \alpha)$$

$$\gamma - \alpha = \arctg(k \tan \alpha) - \alpha$$

Для maximum абсолютной величины $\gamma - \alpha$ имѣемъ условіе:

$$\frac{d(\gamma - \alpha)}{d\alpha} = \frac{d[\arctg(k \tan \alpha)]}{d\alpha} - 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\arctg(k \tan \alpha)]}{d\alpha} &= \frac{1}{1 + (k \tan \alpha)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot k = \\ &= \frac{k}{\cos^2 \alpha + k \sin^2 \alpha} = \frac{k}{1 + (k^2 - 1) \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Отсюда условіе maximum

$$1 + (k^2 - 1) \sin^2 \alpha = k \text{ или}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{k+1}}$$

Величина k близка къ единицѣ (нѣсколько больше ея), а потому $\sin \alpha$ близокъ къ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ т. е. α близокъ къ 45° (нѣсколько меньше 45°).

Уголъ $\alpha = 45^\circ$ между плоскостью паденія и плоскостью поляризаціи какъ разъ имѣетъ мѣсто въ волнахъ, отвѣчающихъ точкамъ интерференціонной фигуры, лежащимъ на діагональномъ діаметрѣ. Здѣсь поэтому и должно быть наибольшее просвѣтленіе вслѣдствіе отклоненія плоскости поляризаціи при преломленіи.

Пользуясь накладнымъ анализаторомъ, можно поворотомъ его достигнуть возстановленія перпендикулярности плоскости поляризаціи волнъ, отвѣчающихъ концамъ діагональнаго діаметра, къ плоскости поляризаціи анализатора и получить совершенную темноту въ этихъ точкахъ. Измѣряя уголъ поворота накладнаго анализатора, мы найдемъ уголъ отклоненія плоскости поляризаціи вслѣдствіе преломленія въ конденсорѣ и объективѣ. На долю объектива при этомъ приходится, конечно, значительно большая часть.

Для объектива № 7 микроскоповъ фирмы Фуэса измѣренный такимъ способомъ уголъ около $5-7^\circ$. Максимальный уголъ поворота объективомъ можно считать приблизительно $3-5^\circ$ для самыхъ крайнихъ точекъ фигуры, гдѣ элементы ея, изохроматическія кривыя и темныя балки (изогирь), настолько уже расплывчаты, что этимъ отклоненіемъ можно пренебречь.

Такимъ образомъ можно непосредственно изъ стереограммы направленій колебаній получать направленія свѣтовыхъ колебаній въ каждой изъ волнъ, исходящихъ изъ данной точки интерференціонной фигуры. Мы видимъ, что допускаемая при этомъ ошибка для качественного изученія явленія не имѣетъ значенія. Въ частности эта ошибка дѣлается безконечно малой при приближеніи угла α къ 0° или 90° .

Особое значеніе, какъ извѣстно, имѣютъ тѣ точки интерференціонной фигуры, гдѣ направленія колебаній совпадаютъ съ главными сѣченіями николей и гдѣ, слѣдовательно, происходитъ погасаніе.

Совокупность этихъ темныхъ точекъ образуетъ изогирь, наблюдаемая въ видѣ темныхъ балокъ.

На основаніи сказаннаго выше мы можемъ вывести изогирь такимъ путемъ. Отыскиваемъ на соответствующей стереограммѣ направленій колебаній геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ касательныя къ кривымъ стереограммы параллельны главнымъ сѣченіямъ николей. Переходя затѣмъ отъ каждой точки полученнаго геометрическаго мѣста, представляющей стереографическую проекцію пѣкотораго направленія, къ ортогональной проекціи пересѣченія этого направленія со сферой проекцій, мы и получимъ рядъ точекъ изогирь. На основаніи указаннаго выше соотношенія между стереографической и ортогональной проекціей, можно прямо считать полученную линію на стереограммѣ направленій колебаній за приблизительное изображеніе изогирь. Для вывода главныхъ свойствъ изогирь такое приближеніе оказывается вполне достаточнымъ.

Бокке¹⁾ при выводѣ изогирь пользуется не стереографическими проекціями сферическихъ кривыхъ направленій колебаній („изотахъ“), а ортогональными, которыя онъ называетъ „скіодромами“. Такой приемъ по существу неправиленъ, — онъ основанъ на смѣшеніи двухъ совершенно разнаго рода понятій.

При переходѣ отъ точекъ сферы къ ортогональнымъ проекціямъ мы слѣдуемъ тому соотношенію, которое связываетъ направленіе распространенія волнъ въ кристаллѣ съ точками интерференціонной фигуры; но направленія колебаній въ этихъ волнахъ съ направленіями колебаній въ волнахъ, исходящихъ изъ точекъ фигуры (образующихъ ихъ), связано, какъ мы видѣли, совершенно другимъ соотношеніемъ. Если до преломленія направленіе колебанія образовало съ плоскостью паденія уголъ ω , послѣ преломленія оно будетъ образовывать уголъ η .

$$\cotg \eta = k \cotg \omega$$

гдѣ $k > 1$ и $\eta < \omega$, какъ мы видѣли выше.

Примѣняя же построеніе по закону ортогональныхъ проекцій, мы вмѣсто ω получимъ уголъ ϵ , при чемъ

$$\tan g \epsilon = \tan g \omega \cdot \frac{1}{\cos \delta}$$

¹⁾ См. подстрочное примѣчаніе на стр. 192.

δ -уголь наклона направлення распространения волны къ оси микроскопа. Очевидно, что $\epsilon > \omega$. Поэтому ясно, что, примѣняя ортогональныя проекціи шаровыхъ эллипсовъ („изотахъ“), мы получаемъ результаты, болѣе удаленные отъ дѣйствительнаго соотношенія, чѣмъ примѣняя стереографическія проекціи этихъ кривыхъ. Въ первомъ случаѣ вмѣсто угла η мы беремъ ϵ , а во второмъ ω , но, какъ мы видимъ,

$$\eta < \omega < \epsilon.$$

Помимо этого пользование скіодромами для вывода изогирь имѣетъ еще одинъ недостатокъ. По Бекке ¹⁾ уголь между двумя скіодромами, меридіанальной и экваторіальной, въ нѣкоторыхъ случаяхъ на $30-40^\circ$ превышаетъ прямой. Поэтому указаннымъ выше настроеніемъ получаютъ не одна, а двѣ вспомогательныя изогирь (Partial-Isogugen), и за дѣйствительное положеніе изогирь Бекке предлагаетъ брать линію среднюю между ними. Такой способъ вывода изогирь, конечно, весьма затрудняетъ изслѣдованіе какъ формы ея въ зависимости отъ разныхъ поворотовъ препарата, такъ и другихъ ея особенностей. Примѣненіе же стереограммъ направлений колебаній свободно и отъ этого недостатка.

Въ дальнѣйшемъ я буду вездѣ при выводѣ свойствъ изогирь исходить изъ особенностей соотвѣтствующихъ стереограммъ направлений колебаній.

§ 4. Различіе одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ. Опредѣленіе оптическаго знака.

Послѣ того какъ найдена возможность сравнивать направлення колебаній и величины двупреломленія для плоскихъ волнъ, проходящихъ черезъ кристаллъ по разнымъ направленіямъ, и установлено соотношеніе между каждой изъ такихъ волнъ съ соотвѣтствующей точкой интерференціонной фигуры, можно вывести для каждаго изъ сѣченій минерала соотвѣтствующую ему интерференціонную фигуру, пользуясь изложенными выше соображеніями.

Основная задача оптическаго изслѣдованія минерала состоитъ: 1) въ опредѣленіи типа оптическаго эллипсоида (индикатриссы), т. е. опредѣленіи

будетъ ли онъ сферой, эллипсоидомъ вращенія или трехоснымъ эллипсоидомъ, и въ опредѣленіи оптическаго знака, 2) въ опредѣленіи положенія этого эллипсоида въ кристаллѣ, что сводится къ опредѣленію положенія осей упругости и оптическихъ осей, 3) въ изслѣдованіи формы этого эллипсоида. Последнее состоитъ въ измѣреніи величинъ двуи преломленія и преломленія минерала и не входитъ въ число тѣхъ вопросовъ, которые разрѣшаются изслѣдованіемъ въ сходящемся поляризованномъ свѣтѣ. Это и понятно: изслѣдуя интерференціонную фигуру, мы сравниваемъ между собою элементы волнъ, проходящихъ черезъ кристаллъ въ разныхъ направленіяхъ, но совершенно не задаемся вопросомъ объ измѣреніи элементовъ какой-либо одной изъ нихъ, чѣмъ именно и является измѣреніе преломленія и двупреломленія. Само собою понятно, что идетъ здѣсь рѣчь только объ анизотропныхъ кристаллахъ, исключая кристаллы кубической сингоніи.

Основаніемъ для рѣшенія вопроса о типѣ эллипсоида и о его положеніи въ пространствѣ служатъ свойства изогирь.

Вообще изогирь представляются одной или двумя темными балками, рѣзкими или расплывчатыми, прямыми или изогнутыми, иногда пересѣкающимися въ видѣ креста, проходящими черезъ центръ поля зрѣнія (центральныя изогирь) или нѣтъ. При вращеніи препарата онѣ перемѣщаются, или совсѣмъ уходятъ изъ поля зрѣнія, или остаются въ немъ, и деформируются. При этомъ концы ихъ двигаются по краю поля зрѣнія въ ту же сторону, какъ мы вращаемъ препаратъ (гомодромно), или въ противоположную (антидромно). Кромѣ того среди всевозможныхъ формъ и положеній интерференціонныхъ фигуръ можно различать фигуры симметричныя и асимметричныя относительно какого-либо діаметра фигуры.

Вотъ всѣ эти особенности и являются объектомъ нашихъ наблюденій при изслѣдованіи изогирь.

Обратимся теперь къ отличію оптически одноосныхъ отъ оптически двуосныхъ кристалловъ.

Какъ и при изслѣдованіи по универсальному (Федоровскому) методу, такъ и при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ основаніемъ для этого служитъ различіе въ симметріи оптическаго эллипсоида одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ. Въ первомъ имѣется безконечная совокупность двойныхъ осей симметріи, служащихъ діаметрами круговаго сѣченія, и кромѣ того—единственная ось симметріи съ безконечно малымъ угломъ поворота, именно—ось вращенія эллипсоида. Черезъ нее и каждую изъ двойныхъ осей проходитъ плоскость симметріи.

¹⁾ L. c. s. 75.

Во второмъ—только три взаимно перпендикулярныхъ двойныхъ осей симметріи n_g , n_m , n_r и три плоскости симметріи, проходящія черезъ каждую пару осей.

При изслѣдованіи по теодолитному методу мы, какъ извѣстно, пользуемся этимъ различіемъ въ симметріи оптическихъ эллипсоидовъ одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ, основываясь на свойствѣ, что каждая изъ двойныхъ осей симметріи является осью зоны такихъ сѣченій эллипсоида, въ которыхъ одна изъ осей эллипса сѣченія совпадаетъ съ этой двойною осью симметріи. Поэтому, совмѣщая ее съ направлениемъ колебаній вступающихъ въ кристаллъ плоскихъ волнъ и вращая около нея препаратъ при помощи оси I столика, будемъ имѣть все время кристаллъ въ положеніи угасанія. Изъ симметріи оптическихъ эллипсоидовъ слѣдуетъ, что въ кристаллахъ одноосныхъ, при любой ориентировкѣ разрѣза минерала плоскостью шлифа, въ этой плоскости находится одна изъ двойныхъ осей симметріи эллипсоида (діаметръ кругового сѣченія), въ кристаллахъ двуосныхъ—вообще въ плоскости шлифа не находится ни одной изъ двойныхъ осей симметріи оптического эллипсоида. Разрѣзы, обладающіе этимъ свойствомъ, являются особыми, исключительными случаями.

Это, какъ извѣстно, и служитъ ближайшимъ основаниемъ пріемовъ, примѣняемыхъ при различіи одноосности и двуосности кристалла на универсальномъ столикѣ. Мы видѣли выше, что интерференціонная фигура, получающаяся при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ, можетъ быть выведена изъ оптического эллипсоида при помощи связующихъ ихъ геометрическихъ системъ кривыхъ направленной колебаній (стереограммъ направленной колебаній) и кривыхъ равнаго двупреломленія. Основное различіе въ симметріи оптическихъ эллипсоидовъ одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ выражается въ совершенно такомъ же видѣ и въ системахъ сферическихъ кривыхъ направленной колебаній и кривыхъ равнаго двупреломленія. Онѣ обладаютъ тѣми же элементами симметріи, какъ и соответствующіе имъ эллипсоиды. (См. стр. 198).

Если переходить къ стереограммамъ направленной колебаній для различныхъ положеній разрѣза въ минералѣ, то, очевидно, въ случаѣ однооснаго кристалла полученная стереограмма направленной колебаній всегда будетъ зеркально симметрична относительно одного изъ діаметровъ ея, проходящаго черезъ проекцію оптической оси. Въ случаѣ двуоснаго—вообще она будетъ асимметрична.

Этотъ діаметръ, проходящій черезъ оптическую ось въ одноосныхъ кристаллахъ, самъ является од-

ной изъ кривыхъ стереограммы направленной колебаній.

Совмѣщая его съ одной изъ главныхъ плоскостей николей, мы непременно получимъ центральную симметричную прямую изогирю, какъ это ясно изъ способа вывода изогирь изъ стереограммы направленной колебаній. Это и является общимъ характернымъ свойствомъ одноосныхъ кристалловъ.

Асимметрия центральной изогиря уже совершенно опредѣленно указываетъ на двуосность минерала.

Но какъ въ двуосныхъ, такъ и въ одноосныхъ кристаллахъ существуютъ особые случаи сѣченій, для которыхъ симметрия стереограммъ направленной колебаній выше, чѣмъ въ общемъ случаѣ. Таковы 1) сѣченія, проходящія черезъ n_g , n_m , n_r двуоснаго кристалла, обладающія стереограммой направленной колебаній, симметричной относительно одного изъ діаметровъ и 2) сѣченія двуосныхъ, перпендикулярныя къ n_g , n_m , n_r , а также сѣченія одноосныхъ, проходящія черезъ оптическую ось и перпендикулярныя къ ней, для которыхъ стереограммы симметричны относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ діаметровъ. (Для сѣченій, перпендикулярныхъ къ оптической оси однооснаго,—онѣ симметричны относительно каждаго изъ діаметровъ). Въ этихъ особыхъ случаяхъ отличать одноосные кристаллы отъ двуосныхъ по общему признаку, указанному выше, нельзя, и они требуютъ особаго разсмотрѣнія.

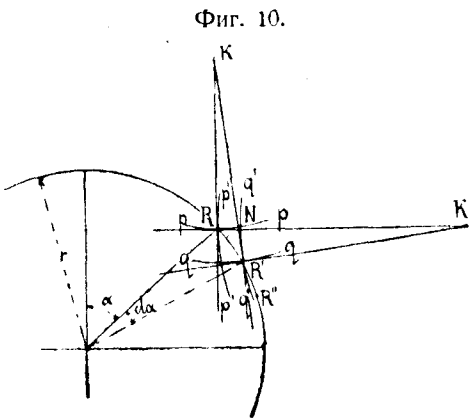
Предварительно остановимся на двухъ общихъ свойствахъ изогирь, которыя необходимо установить для дальнѣйшихъ выводовъ. Именно надо выяснитъ: 1) отчего зависитъ рѣзкость или расплывчатость изогирь и 2) какой конецъ изогиря является антидромнымъ и какой—гомодромнымъ. Эти свойства изогирь надо связать съ особенностями стереограммъ направленной колебаній.

1) Изогира получается изъ стереограммъ направленной колебаній какъ геометрическое мѣсто точекъ, гдѣ направленія колебаній параллельны главнымъ сѣченіямъ николей. Въ точкахъ по ту и другую сторону отъ нея такой параллельности нѣтъ, и потому соответствующія точки интерференціонной фигуры будутъ свѣтлыми. Освѣщеніе при удаленіи отъ изогирь возрастаетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ сильнѣе расходятся около нея кривыя, стереограммы, и это и является причиною рѣзкости изогиря. Такъ какъ имѣются двѣ системы кривыхъ, пересѣкающихся между собою подъ прямымъ угломъ, то послѣднее обстоятельство можетъ быть также выражено въ такой формѣ: и зогира тѣмъ рѣзче, чѣмъ больше кри-

визна пересѣкаемыхъ ею кривыхъ стереограммы направлений колебаній.

2) Для того, чтобы судить объ гомодромности или антидромности какого-либо изъ концовъ изогирь, выведемъ общее выраженіе для скорости его движенія по краю поля зрѣнія.

Пусть въ точкѣ R—конецъ изогирь (фиг. 10). Слѣдовательно здѣсь касательныя KR и K'R къ кривымъ стереограммы направлений колебаній параллельны главнымъ сѣченіямъ николей.



Послѣ бесконечно малаго поворота на уголь $d\phi$ конецъ изогирь перейдетъ въ точку R''. Это будетъ та точка, гдѣ касательныя къ кривымъ стереограммамъ до поворота образовали уголь — $d\phi$ съ главными сѣченіями николей; эта точка находилась до поворота въ R'. Назову $RR' = ds$. Къ точкѣ R' можно перейти отъ точки R по кривымъ стереограммамъ такъ. Сначала перейдемъ по кривой pp къ бесконечно близкой точкѣ N; касательныя къ кривымъ стереограммамъ повернутся при этомъ на уголь $d\delta$. Затѣмъ отъ N перейдемъ къ K' по кривой $q'q'$; касательныя повернутся еще на уголь $d\delta'$. Очевидно:

$$-d\phi = d\delta + d\delta'.$$

Сравнимъ скорости движенія точки края поля зрѣнія съ скоростью движенія конца изогирь. Первая пройдетъ при поворотѣ на $d\phi$ дугу R'R'', а вторая KR''. Такимъ образомъ, называя скорость движенія точки края поля зрѣнія v_0 , скорость движенія конца изогирь v , имѣемъ:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{RR''}{R'R''} = \frac{RR' + R'R''}{R'R''} = \frac{ds + r d\phi}{r d\phi}$$

или, на основаніи выше написаннаго равенства:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{ds}{r} - \frac{(d\delta + d\delta')}{ds + d\delta'};$$

откуда

$$v = v_0 \left(1 - \frac{ds}{ds + d\delta'} \right).$$

Обозначая радиусы кривизны кривыхъ стереограммы направлений колебаній ρ и ρ' , а соответственныя бесконечно малыя дуги $d\delta$ и $d\delta'$, будемъ имѣть:

$$d\delta = \frac{d\delta}{\rho}; \quad d\delta' = \frac{d\delta'}{\rho'}$$

Но изъ бесконечно малаго прямоугольника, ограниченнаго дугами pp , qq , $p'p'$, и $q'q'$, слѣдуетъ, что $d\delta = ds \cdot \cos \alpha$ и $d\delta' = ds \cdot \sin \alpha$. Сдѣлавъ всѣ эти подстановки въ найденное выше выраженіе, получимъ:

$$v = v_0 \left[1 - \frac{1}{r \left(\frac{\cos \alpha}{\rho} + \frac{\sin \alpha}{\rho'} \right)} \right]$$

Изъ этого равенства видно, что гомодромное или антидромное движеніе конца изогирь опредѣляется значеніемъ величины, заключенной въ этой формулѣ въ прямыхъ скобкахъ. Если она больше нуля, конецъ изогирь гомодромный, если меньше — антидромный.

Примѣненіе этой формулы къ общему случаю затрудняется тѣмъ, что для этого надо знать величины ρ и ρ' , но въ частныхъ случаяхъ примѣненіе ея является удобнымъ.

Такъ напримѣръ, въ симметрическихъ стереограммахъ направлений колебаній для сѣченій, проходящихъ чрезъ n_g , n_m и n_p , диаметр, относительно котораго стереограмма симметрична, является самъ одной изъ кривыхъ ея. Для точекъ, на немъ лежащихъ, $\rho' = \infty$. Поворачивая препаратъ, можно привести этотъ диаметръ въ совмѣщеніе съ плоскостью поляризаціи поляризатора или анализатора. Тогда $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 90^\circ$. Какъ видно, въ такихъ случаяхъ формула для v принимаетъ очень простой видъ.

Замѣтимъ еще, что написанная выше формула

можетъ примѣняться для отысканія скорости движенія любой точки изогирь при ея перемѣщеніи, а не только конца изогирь. Тогда только въ этой формулѣ величина c_0 будетъ не скоростью движенія точекъ края поля зрѣнія, а скоростью движенія точекъ, коррелятивныхъ направленій въ кристаллѣ и лежащихъ на концентричной краю поля зрѣнія окружности, которая проходитъ черезъ разсматриваемую точку изогирь. Это ясно изъ способа вывода формулы.

Послѣ этихъ замѣчаній нетрудно понять свойства изогирь для различныхъ особыхъ сѣченій оптически одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ.

1. Одноосные минералы.

Для нихъ выводъ свойствъ изогирь чрезвычайно упрощается благодаря тому, что кривыя стереограммы направлений колебаній являются кругами. Свойства изогирь особыхъ сѣченій—перпендикулярнаго оптической оси и параллельнаго ей,—почти очевидны. Я ограничусь напоминаніемъ этихъ свойствъ, не останавливаясь на нихъ подробно, и затѣмъ перейду къ изслѣдованію общаго случая, что имѣетъ важное значеніе и для дальнѣйшаго вывода свойствъ изогирь двуосныхъ кристалловъ.

А) Сѣченіе перпендикулярное къ оптической оси однооснаго кристалла. Стереограмма направлений колебаній представляетъ проекцію системы меридіановъ и параллелей на плоскость экватора. Образование темнаго, неподвижнаго при вращеніи препарата креста съ одинаковыми вѣтвями, параллельными главнымъ сѣченіямъ николей, не требуетъ особыхъ поясненій. Ясно также эксцентричное положеніе креста въ случаѣ не точно перпендикулярнаго оси сѣченія. Выходъ оси отвѣчаетъ центру креста. При вращеніи препарата онъ описываетъ окружность, и вѣтви креста перемѣщаются, будучи все время приблизительно параллельными главнымъ сѣченіямъ николей.

В) Сѣченіе параллельное оптической оси.

Стереограмма направлений колебаній представляетъ центральную часть проекціи системы параллелей и меридіановъ на плоскость меридіана. Форма изогирь и ея измѣненіе также очевидно, какъ и въ первомъ случаѣ. Прямо изъ стереограммы видно, что, если привести оптическую ось въ одно изъ главныхъ сѣченій николей, то кривыя ея лишь по краямъ діагональнаго діаметра (45° съ главн. сѣч. николей) немного уклоняются отъ параллельности съ главнымъ сѣченіемъ николей. Отсюда понятна характерная изогирь: широкій, расходящійся почти

на все поле зрѣнія, темный крестъ. При вращеніи столика середина поля зрѣнія сразу освѣтляется, и быстро темнѣютъ концы діагональнаго діаметра, проходящаго черезъ тѣ квадранты, куда всгупаетъ оптическая ось, т. е. изогирь быстро распадается на двѣ гиперболы, уходящія въ эти квадранты.

Общее изслѣдованіе свойствъ симметричной изогирь однооснаго кристалла. Какъ было показано выше, для однооснаго кристалла, вращая препаратъ, всегда можно получить симметричную интерференціонную фигуру, въ которой изогирь представляется темной прямой балкой, проходящей черезъ центръ. Балка эта лежитъ въ одномъ изъ главныхъ сѣченій николей.

Въ формулѣ:

$$c = c_0 \left[1 - \frac{1}{r} \frac{\cos \alpha}{\frac{c}{v}} - \frac{\sin \alpha}{\frac{c}{v'}} \right] \dots I$$

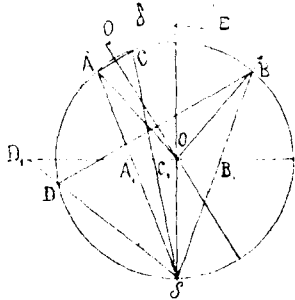
для этого случая $\alpha = 0$, $\varphi = \alpha$. Поэтому она принимаетъ видъ:

$$c = c_0 \left(1 - \frac{\rho}{r} \right) \text{ или } \frac{c}{c_0} = 1 - \frac{\rho}{r} \dots II.$$

Замѣтимъ, что, хотя въ общемъ видѣ формула для c имѣетъ приближенное значеніе вследствие расхожденія истинныхъ направлений колебаній въ интерференціонной фигурѣ съ кривыми стереограммы направлений колебаній, примѣненной для вывода этой формулы, но въ нашемъ частномъ случаѣ эти расхожденія обращаются въ нуль, и написанная формула представляетъ совершенно точное выраженіе $\frac{c}{c_0}$. Для того, чтобы ей воспользоваться, надо найти значеніе для ρ въ зависимости отъ положенія сѣченія въ кристаллѣ. Это положеніе будемъ опредѣлять угломъ δ наклона оптической оси минерала къ оси микроскопа. Величина ρ легко опредѣляется, если обратиться къ свойствамъ стереографическихъ проекцій, при помощи которыхъ стереограмма направлений колебаній выводится изъ сферическихъ кривыхъ направлений колебаній. На плоскости, проходящей черезъ ось проекціи и оптическую ось, мы имѣемъ соотношенія представленные на фиг. 11. Въ нашемъ случаѣ изогирь лежитъ въ этой плоскости. ОО — оптическая ось; А и В края поля зрѣнія, въ которыхъ находятся концы изогирь. Кривыя стереограммы въ этихъ точкахъ представляютъ параллели, плоскости которыхъ пересѣкаютъ плос-

кость чертежа по линиямъ AC и DB. Очевидно, радиусъ поля зрѣнія $r = AO_1 = OB_1$. Искомые же радиусы кривизны для концовъ изогирь $\rho_1 = \frac{A_1C}{2}$ и $\rho_2 = \frac{D_1B_1}{2}$

Фиг. 11.



Ихъ можно найти всего проще изъ подобія треугольниковъ ACS и A₁C₁S съ одной стороны, и DBS и D₁B₁S съ другой. Изъ него слѣдуетъ:

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1S}{AS} \text{ и } \frac{D_1B_1}{DB} = \frac{D_1S}{BS}.$$

Обозначимъ угловое отверстие поля зрѣнія AOB = 2E (внутри минерала, а не въ воздухѣ) и уголъ наклона оптической оси къ оси микроскопа δ . Принимая радиусъ сферы проекцій за единицу, имѣемъ:

$$r = \tan \frac{E}{2}; AS = BS = 2 \cos \frac{E}{2};$$

$$AC = 2 \sin (E - \delta) \text{ и } DB = 2 \sin (E + \delta);$$

$$C_1S = \frac{1}{\cos \left(\frac{E}{2} - \delta \right)} \text{ и } D_1S = \frac{1}{\cos \left(\frac{E}{2} + \delta \right)}.$$

Изъ этихъ равенствъ легко получается такое общее выраженіе для ρ :

$$\rho = \frac{\sin (E \mp \delta)}{2 \cos \left(\frac{E}{2} \mp \delta \right) \cos \frac{E}{2}}$$

Здѣсь знакъ — относится къ концу изогирь, ближайшему къ оптической оси (A), а + къ концу, болѣе удаленному отъ нея (B).

Преобразуя только что найденное выраженіе, получимъ:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[\tan \left(\frac{E}{2} \mp \delta \right) + \tan \frac{E}{2} \right].$$

А значить:

$$\begin{aligned} \frac{v_c}{v_o} &= 1 - \frac{\tan \left(\frac{E}{2} \mp \delta \right) + \tan \frac{E}{2}}{2 \tan \frac{E}{2}} = \\ &= \frac{\tan \frac{E}{2} - \tan \left(\frac{E}{2} \mp \delta \right)}{2 \tan \frac{E}{2}}, \end{aligned}$$

и, наконецъ,

$$\frac{v_c}{v_o} = \frac{\sin (\pm \delta)}{2 \sin \frac{E}{2} \cos \left(\frac{E}{2} \mp \delta \right)},$$

Верхніе знаки (+и—) относятся къ концу изогирь A, нижніе (—и+)—къ концу B. Изслѣдуемъ иолученную формулу. Когда $\delta = 0$; $\frac{v_c}{v_o} = 0$: т. е. концы изогирь неподвижны.

При возрастаніи δ конецъ изогирь, ближайшій къ оптической оси, обнаруживаетъ такія особенности: При увеличеніи δ отъ 0° до E скорость его движенія возрастаетъ, и при $\delta = E$ отношеніе $\frac{v_c}{v_o} = 1$. Это можно и непосредственно видѣть изъ общей формулы, если замѣтить, что для оптической оси $\varphi = 0$.

Возростаніе скорости движенія конца изогирь идетъ и дальше, когда оптическая ось находится уже внѣ поля зрѣнія. Поэтому $\frac{v_c}{v_o} > 1$. Все время

$\frac{v_c}{v_o}$ остается величиной положительной, т. е. конецъ изогирь, ближайшій къ оптической оси, остается гомодромнымъ. Наконецъ, при $\delta = 90^\circ$ отношеніе $\frac{v_c}{v_o} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{E}{2}}$.

Если обратимся къ концу изогирь, болѣе уда-

ленному отъ оптической оси, то увидимъ прежде всего, что для него сначала $\frac{v_c}{v_o} < 0$, т. е. этотъ конецъ антидромный. При возрастаніи δ отъ 0° до значенія $\delta = 90^\circ - \frac{E}{2}$, скорость движенія этого антидромнаго конца возрастаетъ. Когда δ дѣлается равнымъ $90^\circ - \frac{E}{2}$, мы имѣемъ дѣло съ разрывомъ функціи $\frac{v_c}{v_o}$. Ея значеніе изъ $-\infty$ переходитъ въ $+\infty$ и затѣмъ убываетъ до величины $\frac{1}{2 \sin^2 \frac{E}{2}}$ при $\delta = 90^\circ$.

Разрывъ функціи v_c/v_o отвѣчаетъ распаденію изогирь на двѣ гиперболы. Для значеній δ отъ $90^\circ - \frac{E}{2}$ до 90° мы имѣемъ изогирю того типа, какъ въ сѣченіи параллельномъ оси, только съ неодинаковыми вѣтвями гиперболъ.

Общимъ случаемъ симметричной изогирь однооснаго кристалла является, какъ мы видимъ, темная центральная и прямолинейная балка съ гомодромнымъ концомъ, ближайшимъ къ оптической оси и антидромнымъ, противоположнымъ ей. Если мы сравнимъ абсолютную величину скоростей движенія перваго v_{c1} и втораго v_{c2} то изъ выше написаннаго уравненія, найдемъ:

$$\frac{v_{c1}}{v_{c2}} = \frac{\cos\left(\frac{E}{2} + \delta\right)}{\cos\left(\frac{E}{2} - \delta\right)} \dots \dots \dots \text{III.}$$

Откуда слѣдуетъ, что въ общемъ случаѣ гомодромный конецъ движется медленнѣе антидромнаго. Изогира качается на подобіе маятника (Pendel-Isogyre Бекке). Размахи ея слабые, и она мало уклоняется отъ параллельности главнымъ сѣченіямъ николей, но все же при достаточномъ наклонѣ оптической оси эти уклоненія ясно замѣтны. Поэтому обычное указаніе на параллельную главнымъ сѣченіемъ николей темную балку, какъ на общій признакъ однооснаго кристалла, не является вполнѣ точнымъ. Неправильность такой характеристики изогирь однооснаго кристалла была отмѣчена Бекке¹⁾.

Я не останавливаюсь на болѣе подробномъ разсмотрѣніи измѣненія отношенія скоростей разныхъ концовъ симметричной изогирь въ зависимости отъ

наклона оптической оси къ оси микроскопа. Такое разсмотрѣніе сводится къ изслѣдованію формулы III и не представляетъ особыхъ затрудненій.

2. *Оптически двуосные минералы.*

При изслѣдованіи изогирь особыхъ сѣченій двуоснаго минерала, для которыхъ эти изогирь могутъ быть приведены вращеніемъ препарата къ виду прямыхъ центральныхъ балокъ, параллельныхъ главнымъ сѣченіямъ николей, можно воспользоваться той же формулой:

$$\frac{v_c}{v_o} = 1 - \frac{\rho}{r} \dots \dots \dots \text{II.}$$

Здѣсь, однако, радіусъ кривизны пересѣкающихся изогирь кривыхъ стереограммы направленій колебаній ρ не можетъ быть найденъ такъ просто, какъ въ одноосныхъ кристаллахъ. Мы можемъ, не находя точнаго его выраженія, воспользоваться формулой II, если будемъ сравнивать каждый разъ величину ρ съ соответствующимъ значеніемъ ея въ одноосномъ кристаллѣ, которое намъ уже извѣстно изъ изложеннаго выше. Такой способъ сравненія тѣмъ болѣе умѣстенъ, что нашею цѣлью сейчасъ именно и является найти различіе между одноосными и двуосными кристаллами.

Особыми сѣченіями двуосныхъ кристалловъ являются сѣченія, перпендикулярныя осямъ оптическаго эллипсоида n_g , n_m и n_r , и параллельныя имъ (—проходящія черезъ нихъ).

А) Сѣченія перпендикулярныя n_g , n_m и n_r .

Общимъ признакомъ ихъ является симметричность стереограммы направленій колебаній относительно двухъ взаимно перпендикулярныхъ диаметровъ. Эти диаметры сами служатъ кривыми стереограммы, и совмѣщая ихъ съ главными сѣченіями николей, мы будемъ имѣть изогирь въ видѣ темнаго креста съ вѣтвями, параллельными главнымъ сѣченіямъ николей.

Разсмотримъ особенности этого креста для каждой изъ осей эллипсоида.

а) Сѣченіе перпендикулярное острой биссектрисѣ угла оптическихъ осей.

Стереограмма направленій колебаній имѣетъ видъ, изображенный на фиг. 3а. Кривыя ея въ пересѣченіи съ осевой балкой креста (—главный осевой меридіанъ) имѣютъ большую кривизну, чѣмъ въ пересѣченіи съ поперечной. Максимъ рѣзкости достигаетъ

¹⁾ I. с. стр. 76.

она въ точкахъ, отвѣчающихъ оптическимъ осямъ, т. е. здѣсь $\rho = 0$. Для концовъ осевой балки $\rho < r$, для концовъ поперечной $\rho > r$; поэтому первые, какъ это видно изъ формулы II, гомодромны, вторые антидромны.

Въ центрѣ креста $\rho = \rho' = \infty$, и слѣдовательно крестъ при поворотѣ препарата распадается на двѣ гиперболовидныя кривыя. То, что они будутъ имѣть видъ гиперболь можно показать извѣстнымъ построениемъ Малляра¹⁾ въ которомъ вмѣсто точнаго отысканія направленій колебаній по теоремѣ Френеля примѣняется построение, гдѣ дуги на сферѣ замѣнены прямыми на плоскости. Такое построение, конечно даетъ только приблизительное понятіе о формѣ кривыхъ.

Если $V < E$, т. е. если оптическія оси лежатъ въ полѣ зрѣнія, гиперболы не выходятъ изъ него совершенно. Въ діагональномъ положеніи ихъ вершины отвѣчаютъ оптическимъ осямъ. Если $V > E$, гиперболы совершенно выходятъ изъ поля зрѣнія и тѣмъ быстрѣе, чѣмъ больше V ²⁾.

б. Сѣченіе перпендикулярное къ тупой биссектрисѣ угла оптическихъ осей.

Какъ видно изъ сходства стереограммъ направленія колебаній, почти все сказанное относительно сѣченія, перпендикулярнаго къ острой биссектрисѣ, справедливо и въ данномъ случаѣ. Разница лишь въ томъ, что здѣсь, при обычныхъ способахъ наблюденія, оптическія оси всегда лежатъ внѣ поля зрѣнія. Вершины гиперболь выходятъ изъ поля зрѣнія раньше, чѣмъ въ сѣченіи, перпендикулярномъ къ острой биссектрисѣ. Для различія того и другого сѣченія можно примѣнить поэтому такой приемъ. Можно для данной системы конденсора и объектива заранее опредѣлить изъ опыта, при какомъ поворотѣ столика выходятъ изъ поля зрѣнія вершины гиперболь въ нейтральныхъ кристаллахъ съ $2V = 90^\circ$. Если въ изслѣдуемомъ сѣченіи этотъ уголъ поворота больше, чѣмъ въ нейтральномъ кристаллѣ, имѣемъ сѣченіе перпендикулярное острой биссектрисѣ, если меньше—тупой. Реакція мало чувствительна.

с) Сѣченіе перпендикулярное n_m .

Стереограмма направленій колебаній представляетъ центральную часть фиг. 3 в). Видно большое сходство съ соответствующей стереограммой однооснаго кристалла³⁾, но отклоненіе кривыхъ отъ

¹⁾ См. наприм. Физическую Кристаллографію Грота, русскій переводъ стр. 112—113. Дополненіе редактора.

²⁾ См. Michel-Lévy et Lacroix—Minéraux des roches 1888 p. 90.

³⁾ Т. е. стереограммой сѣченія, проходящаго черезъ оптическую ось однооснаго кристалла.

параллельности главнымъ сѣченіямъ николей по концамъ діагональнаго діаметра интерференціонной фигуры еще меньше. Темный крестъ еще расплывчатѣе и тѣмъ болѣе, чѣмъ больше $2V$; для кристалловъ съ $2V = 90^\circ$ все поле зрѣнія представляется темнымъ. Если $2V$ достаточно отличается отъ 90° , можно видѣть, какъ крестъ распадается на гиперболы, уходящія въ тѣ квадранты, куда вступаетъ острая биссектриса.

В) Сѣченія проходящія черезъ n_g , n_m и n_p .

Черезъ каждую изъ осей оптическаго эллипсоида проходитъ безчисленное множество сѣченій, для которыхъ стереограмма направленій колебаній симметрична относительно одного изъ діаметровъ, и поэтому вращеніемъ препарата можно получить изогирю въ видѣ одной темной, центральной, прямолинейной балки, параллельной одному изъ главныхъ сѣченій николей.

а) Сѣченія проходящія черезъ n_m .

Среди нихъ особыми являются сѣченія, перпендикулярныя къ оптическимъ осямъ. Сначала рассмотримъ общій случай сѣченій подъ косымъ угломъ къ оптическимъ осямъ и притомъ настолько удаленныхъ отъ круговыхъ сѣченій оптическаго эллипсоида, что оптическая ось лежитъ внѣ поля зрѣнія. Соответствующія стереограммы направленій колебаній имѣютъ много общаго съ общимъ случаемъ однооснаго кристалла: такъ же, какъ тамъ, изогирю иересѣкаютъ кривыя стереограммы, обращенныя вогнутостью къ оптической оси, и кривизна ихъ по мѣрѣ приближенія къ оптической оси возрастаетъ. Поэтому имѣемъ такую же изогирю съ болѣе рѣзкимъ гомодромнымъ концомъ, ближайшимъ къ оптической оси, и съ другимъ, болѣе расплывчатымъ антидромнымъ. Антидромный конецъ движется быстрѣе гомодромнаго. Возрастаніе кривизны кривыхъ стереограммы по мѣрѣ приближенія къ оси идетъ быстрѣе, чѣмъ въ одноосныхъ кристаллахъ. Соответственно этому разница въ скоростяхъ антидромнаго и гомодромнаго концовъ больше, и размахи качающейся на подобіе маятника изогиря сильнѣе.

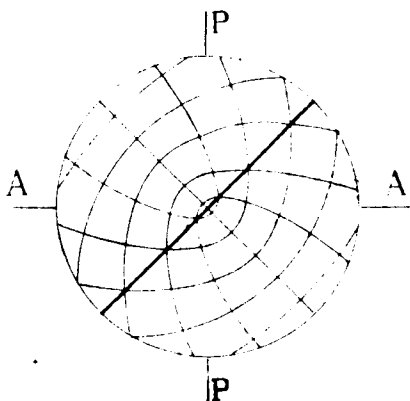
Въ случаѣ сѣченій, перпендикулярныхъ оптической оси, изогиря при вращеніи столика все время остается проходящей черезъ центръ фигуры. При совмѣщеніи плоскости оптическихъ осей съ каждымъ изъ главныхъ сѣченій николей изогиря превращается въ прямую балку совпадающую съ этимъ главнымъ сѣченіемъ. Чтобы составить представленіе объ изгибаніи балки въ другихъ положеніяхъ, рассмотримъ сначала особенности изогиря кристалла съ $2V = 90^\circ$. Эти кристаллы обладаютъ для сѣченій перпендикулярныхъ

оптической оси стереограммами направлений колебаний, симметричными около двухъ взаимно перпендикулярныхъ диаметровъ. Такое свойство непосредственно вытекаетъ изъ указанной выше (стр.198) особенности, что въ кристаллахъ съ $2V = 90^\circ$ n_m является четверной осью симметрии системъ сферическихъ кривыхъ направлений колебаний.

Одинъ изъ диаметровъ, относительно которыхъ симметрична стереограмма, отвѣчаетъ плоскости оптическихъ осей, другой — плоскости проходящей чрезъ оптическую ось и n_m .

Поставивъ препаратъ въ диагональное положение, такъ, чтобы n_m было подь угломъ 45° къ главнымъ сѣченіямъ николей, т. е. въ симметричномъ по отношенію къ нимъ положеніи, мы будемъ имѣть интерференціонную фигуру, симметричную относительно диагональныхъ диаметровъ. Отсюда понятно, что изогрира должна быть въ этомъ случаѣ прямою балкой,

Фиг. 12а.

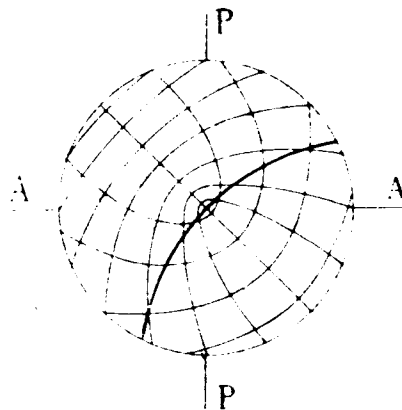


расположенной подь угломъ 45° къ главнымъ сѣченіямъ николей (фиг. 12а) такъ какъ только такая балка удовлетворяетъ условію симметричности относительно диагональныхъ диаметровъ.

Въ кристаллахъ съ $2V$ не равнымъ 90° сферическіе эллипсы, охватывающіе острый уголъ оптическихъ осей, расширены по сравненію съ тѣми, что у кристалловъ съ $2V = 90^\circ$, а эллипсы, охватывающіе тупой уголъ, болѣе вытянуты. Сообразно этому на стереограммѣ направлений колебаний направленія кривыхъ повернуты, какъ это представлено на фиг. 12б, и изогрира дугообразно изогнута. Выпуклость ея обращена въ сторону острой биссектрисы. По Бекке такое изгибаніе замѣтно ясно въ кристаллахъ, гдѣ $2V = 80^\circ$. При большемъ углѣ оптическихъ осей изгибаніе трудно различается. Оба конца изо-

гиры, какъ въ случаѣ $2V = 90^\circ$, такъ и если $2V$ не равно 90° , антидромны, что ясно видно изъ фиг. 12а и 12б.

Фиг. 12б.



При вращеніи столика балка вращается около оптической оси въ сторону, обратную вращенію столика, и изгибаніе ея тѣмъ больше, чѣмъ больше $2V$ отличается отъ 90° . Если сѣченіе не строго перпендикулярно къ оптической оси, центръ вращенія изогриры самъ описываетъ окружность согласно съ вращеніемъ столика.

б) Сѣченія, проходящія черезъ биссектрисы угла оптическихъ осей.

Когда такія сѣченія близки къ плоскости оптическихъ осей, стереограммы направлений колебаний имѣютъ большое сходство съ тѣми, что въ очень косыхъ сѣченіяхъ кристалловъ одноосныхъ. Кривыя стереограммы, пересѣкающія изогриру, обращены выпуклостью въ сторону биссектрисы угла оптическихъ осей, и кривизна ихъ въ этомъ направленіи возрастаетъ. Однако разница въ кривизнѣ менѣе, чѣмъ въ соответственныхъ сѣченіяхъ однооснаго, и потому разность скоростей антидромнаго и гомодромнаго концовъ меньше, чѣмъ у кристалловъ одноосныхъ. Если мы будемъ переходить къ сѣченіямъ, болѣе удаленнымъ отъ плоскости оптическихъ осей, то это отличіе двусосныхъ кристалловъ отъ одноосныхъ будетъ выступать все рѣзче. Наконецъ, перейдя нѣкоторый предѣлъ, мы будемъ имѣть изогриру, у которой уже гомодромный конецъ будетъ двигаться быстрѣе антидромнаго (Fächer-Isogyre Бекке). Такія изогриры свойственны исключительно двусоснымъ кристалламъ.

Неизбѣжность ихъ появленія въ определенныхъ

сѣченіяхъ кристалловъ двуосныхъ, проходящихъ черезъ биссектрисы угла осей, ясна изъ того, что въ достаточно близкихъ къ перпендикулярности биссектрисамъ сѣченіяхъ, кривизна кривыхъ стереограммы, пересекающихся изогирю, по направлению къ биссектрисѣ у бы ваетъ, а не возрастаетъ, какъ въ одноосныхъ кристаллахъ.

Всѣ признаки интерференціонныхъ фигуръ, служащіе для различія одноосности или двуосности кристалловъ, можно свести въ такую таблицу:

А. Изогира представляетъ одну балку.

1. Центральная балка діагональная или косая:

двуосный минераль; если діагональная балка съ одинаковыми концами—прямая, то $2V = 90^\circ$; если изогнута, — $2V \geq 90^\circ$;

Если балка при вращеніи не выходитъ изъ поля зрѣнія, вращаясь около нѣкоторой точки, то эта точка отвѣчаетъ оптической оси.

2. Центральная балка прямая, параллельная главнымъ сѣченіямъ николей и дѣлящая поле зрѣнія пополамъ.

а) Балка движется почти параллельно себѣ и главнымъ сѣченіямъ николей:

одноосный минераль—косое сѣченіе.

б) Изогира быстрое движется антидромнымъ концомъ:

α —одноосный минераль—сильно косое сѣченіе
[β]—двуосный—сѣченія черезъ n_g , n_m и n_p .

с) Антидромный конецъ изогри движется медленнее гомодромнаго:

двуосный минераль—сѣченіе проходитъ черезъ n_g или n_p .

д) Расплывчатая балка, приближающаяся къ В. з:

α —очень косое сѣченіе однооснаго минерала

β —сѣченіе двуоснаго, проходящее черезъ n_g и n_p и близкое къ плоскости оптическихъ осей.

3. Валка (ясная или расплывчатая) прямая и параллельная главнымъ сѣченіямъ николей, но не центральная и при вращеніи столика ясно не остающаяся себѣ параллельной (ср. А2а):

двуосный минераль; въ полѣ зрѣнія одна изъ плоскостей симметріи оптическаго эллипсоида.

В. Изогира представлена болѣе чѣмъ одной балкой.

1. Темный крестъ съ одинаковыми вѣтвями, параллельными николямъ; если центральный, — то при вращеніи столика неподвиженъ, если эксцентричный—вращается около центра поля зрѣнія, оставаясь себѣ параллельнымъ—одноосный минераль.

2. Крестъ съ одной болѣе расплывчатой вѣтвью при вращеніи распадается на гиперболы: двуосный минераль.

3. Неясный, очень расплывчатый крестъ, очень быстро распадается на уходящій изъ поля зрѣнія гиперболы:

а) одноосный минераль; сѣченіе параллельное оптической оси;

б) двуосный—сѣченіе перпендикулярно къ n_m .

Для различія, въ случаѣ не точнаго соблюденія указанной перпендикулярности, служить не вполне симметричный видъ креста въ двуосномъ и всегда симметричный относительно одного изъ главныхъ сѣченій николей въ одноосномъ.

Какъ видно, въ большинствѣ случаевъ перечисленные признаки даютъ возможность отличать двуосные минералы отъ одноосныхъ, но не всегда: въ случаѣ прямой, центральной, симметричной балки, параллельной главнымъ сѣченіямъ николей и при вращеніи столика перемѣщающейся такъ, что антидромный конецъ движется быстрее гомодромнаго, нельзя быть увѣреннымъ, имѣемъ ли мы дѣло съ однооснымъ кристалломъ или съ частнымъ случаемъ двуоснаго, когда разрѣзъ шлифа проходитъ черезъ n_g , n_m или n_p . Затѣмъ, можно смѣшать сѣченіе однооснаго, проходящее черезъ оптическую ось, съ сѣченіемъ двуоснаго, перпендикулярнымъ къ n_m .

Изъ приведенной таблички нельзя не замѣтить нѣкоторую аналогію въ наблюдаемыхъ въ сходящемся свѣтѣ явленіяхъ съ явленіями, обнаруживаемыми кристалломъ на универсальномъ (Федоровскомъ) столикѣ. Эта аналогія выступитъ еще яснѣе, если мы сдѣлаемъ такое сопоставленіе пріемовъ, употребляемыхъ въ томъ и другомъ случаѣ для различія одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ.

Въ сходящемся свѣтѣ вращеніемъ препарата получаемъ центральную изогри. Этому можно достигнуть, предварительно установивъ въ параллельномъ свѣтѣ кристаллъ въ положеніе угасанія.

1) Изогира асимметрична.

2) Изогира симметрична относительно одного изъ главныхъ сѣченій николей.

3) Изогира симметрична относительно обоихъ главныхъ сѣченій николей.

На универсальномъ столикѣ вращеніемъ препарата въ его плоскости ставимъ его послѣдовательно въ одно и другое положеніе угасанія и каждый разъ, вращая около оси I, слѣдимъ за сохраненіемъ темноты.

1) Ни одна темнота не сохраняется.

2) Одна темнота сохраняется.

3) Обѣ темноты сохраняются.

Случай, когда изслѣдованіе въ сходящемся свѣтѣ не можетъ разрѣшить вопроса о одноосности или одноосности минерала, являются тѣми, въ которыхъ на универсальномъ столикѣ требуется для этого различія наклонъ около вспомогательной оси H . Такимъ образомъ, можно сказать, что изслѣдованіе интерференціонныхъ фигуръ въ цѣляхъ опредѣленія одноосности и двусности минерала равносильно изслѣдованію на маломъ универсальномъ столикѣ съ двумя осями (безъ оси H). Оно является слѣдовательно вообще методомъ менѣе совершеннымъ, чѣмъ изслѣдованіе на столикѣ съ тремя осями, и можно указать, пожалуй, только единственный случай, когда примѣненіе сходящагося свѣта оказывается болѣе надежнымъ способомъ для опредѣленія двусности минерала. Это случай кристалловъ двусныхъ съ малымъ угломъ оптическихъ осей и небольшимъ двупреломленіемъ, когда имѣются сѣченія, перпендикулярныя острой биссектрисѣ. На универсальномъ столикѣ въ этомъ случаѣ доступны обѣ оптическія оси, но, поставивъ n_m въ діагональное положеніе и переходя отъ одной оптической оси къ другой, мы не видимъ между ними замѣтнаго просвѣтленія. Въ сходящемся свѣтѣ, хотя въ этомъ случаѣ распадъ креста на гиперболы и не отчетливо, но все таки неодинаковость вѣтвей его и нѣкоторыя измѣненія при вращеніи столика замѣтны, чѣмъ какія либо изъ особенностей, обнаруживаемыхъ на универсальномъ столикѣ.

Обратимся теперь къ *опредѣленію оптическаго знака минерала*. Какъ мы видѣли, оптической знакъ минерала отвѣчаетъ знаку меридіанальныхъ кривыхъ (въ одноосномъ—меридіановъ) направленной колебаній, т. е. въ кристаллахъ положительныхъ меридіанальные эллипсы (меридіаны одноосныхъ) отвѣчаютъ n_x , а экваторіальные (параллели въ одноосныхъ) — n_y . Въ кристаллахъ отрицательныхъ — наоборотъ. Поэтому, для опредѣленія оптическаго знака минерала нужно, во первыхъ, опредѣлить направленія кривыхъ стереограммы для даннаго сѣченія и ихъ оптической знакъ и, вторыхъ, различить меридіальные эллипсы отъ экваторіальныхъ. Способъ опредѣленія направленія кривыхъ стереограммы (—направленія колебаній) вытекаетъ изъ связи ихъ съ формой изогирь. Въ точкахъ изогирь они совпадаютъ съ главными сѣченіями никелей, а по сторонамъ ея уклоняются отъ этого направленія тѣмъ сильнѣе, чѣмъ рѣзче изогиря. Судя по формѣ изогирь и ея измѣненію при вращеніи столика всегда можно составить болѣе или менѣе приблизительное понятіе о направленіяхъ колебаній въ разныхъ точкахъ интерфе-

ренціонной фигуры и объ общемъ видѣ кривыхъ стереограммы направленной колебаній.

Опредѣленіе знака кривыхъ стереограммы достигается употребленіемъ кварцеваго клина, слюдяной пластинки въ $\frac{1}{4}\lambda$, или гипсовой пластинки, дающей красный I порядка или чувствительный фіолетовый цвѣтъ, введеніе которыхъ между препаратомъ и анализаторомъ вызываетъ повышеніе или пониженіе интерференціонныхъ цвѣтовъ въ точкахъ фигуры вследствие сложения разностей хода элементарныхъ волнъ, прошедшихъ чрезъ кристаллъ съ тою, которую даетъ пластинка.

Въ зависимости отъ того, какимъ приборомъ мы пользуемся, различно измѣняется видъ интерференціонной фигуры. При вдвиганіи клина послѣдовательно интерференціонная окраска въ каждой точкѣ смѣняется другой, болѣе высокой или низкой, которой въ предыдущій моментъ обладала нѣкоторая другая сосѣдняя точка, и потому интерференціонная фигура представляется движущейся. При употребленіи пластинки $\frac{1}{4}\lambda$ изогиря смѣщается въ точкѣ, гдѣ колебанія были направлены перпендикулярно къ соответственнымъ колебаніямъ въ введенной пластинкѣ и гдѣ разность хода была $\frac{1}{4}\lambda$ (слѣдовательно, въ точкѣ близкой изогирѣ). При введеніи гипсовой пластинки, дающей красный I порядка, изогиря окрашивается въ этотъ красный цвѣтъ, а въ сосѣднихъ точкахъ, гдѣ происходитъ пониженіе цвѣтовъ, наблюдается желтая, а гдѣ повышеніе—синяя окраска. Такимъ образомъ, тѣмъ или инымъ способомъ можно опредѣлить расположеніе n'_x и n'_y въ различныхъ точкахъ интерференціонной фигуры.

Остается различить, какое изъ этихъ направленныхъ отвѣчаетъ меридіанальнымъ кривымъ стереограммы и какое экваторіальнымъ. Указанныя выше особенности изогирь позволяютъ отвѣтить на этотъ вопросъ.

Въ одноосныхъ кристаллахъ симметричная изогиря всегда отвѣчаетъ направленію меридіановъ, а параллели ея пересѣкаютъ. Отсюда слѣдуетъ, что въ одноосномъ кристаллѣ опредѣленіе оптическаго знака всегда возможно. Въ двусныхъ кристаллахъ не всегда можно различить меридіанальныя и экваторіальныя кривыя, и опредѣленіе оптическаго знака не всегда возможно, а только въ особыхъ случаяхъ.

Случай эти слѣдующіе.

1. Сѣченіе, перпендикулярное къ оптической оси, или близкое къ этому, когда въ полѣ зрѣнія наблюдается выходъ оптической оси. Выпуклость изогирь, приведенной въ діагональное положеніе, обращена въ этомъ случаѣ къ острой биссектрисѣ, а значитъ

съ этой стороны изогри идутъ параллельно ей меридіанальныя, а съ вогнутой стороны—экваторіальныя дуги.

2. Въ случаѣ сѣченій, перпендикулярныхъ къ острой или тупой биссектрисѣ, для опредѣленія оптическаго знака, надо знать, съ какою именно биссектрисой мы имѣемъ дѣло. Выше указано средство различать острую и тупую биссектрисы.

3. Въ сѣченіяхъ, перпендикулярныхъ n_m , если уголъ $2V$ не очень великъ, положеніе острой биссектрисы двуснаго минерала опредѣляется, а значить можно найти и оптическій знакъ.

4. Въ сѣченіяхъ, проходящихъ черезъ n_g или n_p и дающихъ изогри съ быстрое двигающимся гомодромнымъ концомъ, послѣдній обращенъ въ сторону (противоположную n_m). Для того, чтобы опредѣлить оптическии знакъ, надо знать черезъ какую биссектрису проходитъ сѣченіе, что не всегда возможно.

Какъ видимъ, распознаваніе оптическаго знака минерала въ сходящемся свѣтѣ, достижимо тогда, когда это можно сдѣлать на универсальномъ столикѣ, не прибѣгая къ вспомогательной оси Н. Въ самомъ дѣлѣ, въ случаѣ 1 наблюденіемъ устанавливается положеніе оптической оси и плоскости оптическихъ осей, поэтому по наблюденію угла погасанія въ произвольномъ положеніи столика можно найти и другую оптическую ось (по теоремѣ Френеля) и, значить, опредѣлить оптическии знакъ. Въ случаѣ 2 обѣ оси непосредственно опредѣляются. Въ случаѣ 3 положеніе оптическихъ осей можетъ быть найдено, напримѣръ, путемъ послѣдовательнаго приближенія ¹⁾.

§ 5. Опредѣленіе положенія оптическаго эллипсоида.

Опредѣленіе положенія оптическаго эллипсоида въ кристаллѣ состоитъ въ общемъ случаѣ въ томъ, что мы находимъ положеніе въ изслѣдуемомъ шлифѣ какъ оптическаго эллипсоида, такъ и нѣкоторыхъ кристаллографическихъ направленій. Сопоставляя то и другое, мы и разрѣшаемъ задачу. Опредѣленіе положенія кристаллографическихъ направленій уже не входитъ въ задачу оптическаго изслѣдованія въ тѣсномъ смыслѣ слова. Говоря объ изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ, мы должны предполагать поло-

женіе шлифа въ кристаллѣ уже извѣстнымъ. Въ дѣйствительности примененіе сходящагося свѣта въ этомъ случаѣ ограничивается или опредѣленно-ориентированными разрѣзами (въ шлифѣ можно, напримѣръ, выбрать разрѣзы перпендикулярные оси призмы и т. д.), или можетъ быть применено къ изслѣдованію двойниковъ по общему правилу: мы изслѣдуемъ два индивида двойника и затѣмъ, опредѣливъ положеніе оптическаго эллипсоида каждаго изъ нихъ, находимъ положеніе связывающей ихъ двойниковой оси, которая и является однимъ изъ кристаллографическихъ направленій. Здѣсь я ограничиваюсь только опредѣленіемъ положенія оптическаго эллипсоида въ шлифѣ.

Положеніе оптическаго эллипсоида въ пространствѣ извѣстно, когда найдено положеніе какихъ либо двухъ изъ направленій въ немъ: оптическихъ осей и осей симметріи. Это само собою очевидно для случаевъ, когда извѣстны пара осей симметріи, обѣ оптическии оси или оптическая ось и одна изъ биссектрисъ угла осей (n_g или n_p). Если же извѣстна одна изъ оптическихъ осей и n_m (т. е. оптическая ось и плоскость $n_g n_p$), то наблюдаемъ направленіе погасанія въ произвольномъ сѣченіи и настроеніемъ Френеля находимъ вторую оптическую ось; такимъ образомъ этотъ случай сводится къ случаю, когда извѣстны обѣ оптическии оси.

При изслѣдованіи по теодолитному методу опредѣленіе двухъ такихъ направленій всегда возможно ¹⁾. Какъ извѣстно, оно основано для осей симметріи оптическаго эллипсоида на томъ свойствѣ, что при совмѣщеніи ихъ съ направленіемъ колебанія волны, вышедшей изъ анализатора, мы въ скрещенныхъ николяхъ увидимъ темноту, сохраняющуюся при вращеніи препарата около этого направленія. Для отысканія оптической оси мы пользуемся свойствомъ, что темнота сохраняется при совмѣщеніи ея съ осью микроскопа и вращеніи около этой оси (въ двусныхъ минералахъ наблюдается темнота несколько этому не мѣшаетъ коническая рефракція). Зная положеніе тѣхъ осей столика, около которыхъ мы производимъ повороты препарата, и измѣряя углы вращенія, мы легко изобразимъ найденное направленіе въ видѣ стереографической (или какой угодно другой) проекціи.

При изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ ходъ работы таковъ.

1) По наблюденіямъ надъ особенностями интер-

¹⁾ Смотр. проф. Е. С. Федоровъ — Курсъ кристаллографіи, изд. 1901, стр. 382—383. Можно также въ этомъ случаѣ различить острую и тупую биссектрисы приемомъ, описаннымъ мною въ этихъ Запискахъ, томъ III, стр. 398.

¹⁾ См. В. В. Никитинъ „Универсальный оптический методъ Федорова“ стр. 86 и 95. Литогр. изд. 1911 г.

ференціонной фигуры рѣшаемъ, какая изъ ея точекъ соотвѣтствуетъ искомому направленію.

(Въ случаѣ, когда ось симметріи эллипсоида лежатъ внѣ поля зрѣнія, можетъ случиться, что въ полѣ зрѣнія лежитъ плоскость симметріи эллипсоида, и можно опредѣлить ея положеніе).

2) Измѣряемъ координаты этой точки интерференціонной фигуры или непосредственно, или на изображеніи интерференціонной фигуры.

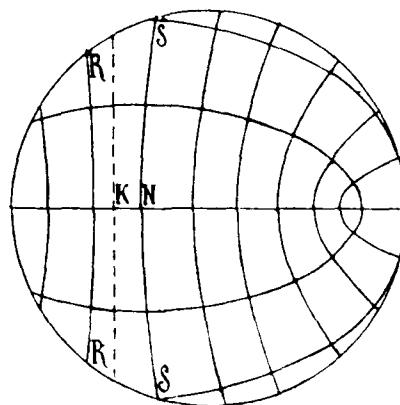
3) Отъ соотношенія между точками интерференціонной фигуры, или полученнаго такимъ образомъ изображенія ея переходимъ къ соотношенію коррелированныхъ направленій въ кристаллѣ.

Первая изъ этихъ трехъ задачъ уже разсматривалась отчасти, когда шла рѣчь объ изогнахъ особыхъ сѣченій кристалла. Признаки интерференціонныхъ фигуръ, указывающіе на то, что мы имѣемъ дѣло съ особымъ сѣченіемъ кристалла, тѣмъ самымъ опредѣляютъ положеніе осей или плоскостей симметріи оптического эллипсоида въ пространствѣ. Какъ мы видѣли, въ случаѣ особыхъ сѣченій, перпендикулярныхъ къ n_g , n_m и n_p оптического эллипсоида, эти направленія отвѣчаютъ центру темнаго симметричнаго креста, являющагося характерной для этихъ сѣченій формой изогирь. Вѣтви креста отвѣчаютъ плоскостямъ симметріи эллипсоида, пересѣкающимся въ этой оси. Въ сѣченіяхъ, перпендикулярныхъ къ плоскости симметріи эллипсоида, этой плоскости отвѣчаютъ точки прямой, центральной, симметричной изогирь. Оптической оси отвѣчаетъ точка, около которой вращается изогира.

Въ случаяхъ, когда мы имѣемъ дѣло не съ особыми сѣченіями, но съ такими, которыя все таки настолько близки къ нимъ, что оси симметріи, плоскости симметріи эллипсоида или оптическія оси лежатъ внутри конуса, ограничивающаго поле зрѣнія, общій видъ интерференціонной фигуры близокъ къ виду фигуръ соотвѣствующихъ особымъ сѣченіямъ, но получающійся темный крестъ или прямая изогира расположены асимметрично. Однако, въ этихъ случаяхъ центр креста и положеніе прямыхъ балокъ не отвѣчаютъ непосредственно направленіямъ осей и плоскостей симметріи оптического эллипсоида. Это совершенно ясно изъ фиг. 13. Здѣсь острой биссектрисѣ угла оптическихъ осей отвѣчаетъ точка N стереограммы направленій колебаній. Но центру темнаго креста отвѣчаетъ не она; а точка K; вертикальная вѣтвь его не будетъ отвѣчать плоскости симметріи эллипсоида SS, а сдвинется влѣво и будетъ заключена между кривыми стереограммы SS и RR, какъ это показано прерывистой линіей. Очевидно,

что величина этого смѣщенія KN зависитъ отъ положенія точки N и отъ формы кривыхъ стереограммы, т. е. отъ величины угла оптическихъ осей $2V$. Это обстоятельство было отмѣчено Бекке ¹⁾, и онъ

Фиг. 13.



даетъ слѣдующую таблицу, изъ которой видна разница между угловыми разстояніями отъ оси микроскопа направленія, отвѣчающаго центру темнаго креста $[\delta]$, и направленію соотвѣствующаго биссектрисѣ $[\delta_0]$ при разной величинѣ V.

V	δ_0	δ	$\delta - \delta_0$
30°	10°	11,5°	1,5°
	20	24	4
	30	35	5
45°	5°	7,5°	2,5
	10	13,7	3,7
	20	27,2	7,2
60°	5°	8,3°	3,3°
	10	18	8
	20	30,6	10,6
	30	43	13

¹⁾ I. с. стр. 93.

Эти цифры были получены Бекке графически из моделей шаровых эллипсовъ при помощи стереографическихъ проекцій. Имъ рассмотрѣны сѣченія зоны, перпендикулярной плоскости оптическихъ осей. При этомъ наблюдается отклоненіе центра креста отъ точки, отвѣчающей биссектрисѣ въ одномъ направленіи, параллельномъ главному сѣченію одного изъ николей (или вѣтви креста). Для произвольнаго сѣченія надо ввести еще и другую поправку на отклоненіе центра креста и въ другомъ направленіи, перпендикулярномъ первому. Подобныя же поправки нужно вводить и при опредѣленіи положенія плоскости симметріи эллипсоида по положенію соответствующихъ прямыхъ изогирь, параллельныхъ главнымъ сѣченіямъ николей.

Остановиваться на опредѣленіи размѣровъ этихъ поправокъ я не буду. Для насъ важны только выходы, который можно сдѣлать уже изъ рассмотрѣнія таблицы Бекке.

Изъ нея слѣдуетъ, что эти отклоненія настолько велики, что пренебрегать ими нельзя. Но для того, чтобы вводить поправки, нужно знать величину $2V$. Въ большинствѣ случаевъ эта величина не является заранее точно извѣстной, какъ напримѣръ даже въ извѣстныхъ минералахъ, представляющихъ изоморфныя смѣси, гдѣ уголъ оптическихъ осей подверженъ большимъ колебаніямъ въ зависимости отъ химическаго состава. Поэтому, вообще только тогда опредѣленіе положенія эллипсоида съ удовлетворительной точностью достижимо, когда внутри конуса направленій, ограничивающаго поле зрѣнія, заключается хотя бы одна оптическая ось и величина V можетъ быть измѣрена. Это необходимое условіе есть вмѣстѣ съ тѣмъ и теоретически достаточное. Въ самомъ дѣлѣ, когда въ полѣ зрѣнія наблюдается хотя бы одна оптическая ось, то въ сходящемся свѣтѣ можно опредѣлить и положеніе плоскости оптическихъ осей. Для этого вращаемъ препаратъ до того положенія, когда изогиря будетъ прямою балкой, параллельной одному изъ главныхъ сѣченій николей. Въ это время направленіе ея соответствуетъ (не вполне точно) направленію слѣда плоскости оптическихъ осей. Кроме того, вращая препаратъ, можемъ привести изогирю въ любую точку интерференціонной фигуры, а слѣдовательно можемъ опредѣлить направленіе колебаній въ элементарной волнѣ, соответствующей этой точкѣ, т. е. направленіе погасанія въ перпендикулярномъ ей распространенію сѣченія. Далѣе уже не трудно построениемъ Френеля найти другую оптическую ось и положеніе оптического эллипсоида.

Практически, однако, эти построенія мало точны

и даютъ сколько нибудь удовлетворительные результаты лишь въ случаѣ, когда оптическая ось близка къ центру поля зрѣнія.

Такимъ образомъ наблюденія въ сходящемся свѣтѣ, кроме тѣхъ случаевъ, когда ими устанавливается, что мы имѣемъ дѣло съ однимъ изъ особыхъ сѣченій, разобранныхъ выше, даютъ возможность опредѣлить положеніе эллипсоида въ слѣдующихъ трехъ случаяхъ.

1. Когда въ полѣ зрѣнія находятся обѣ оптической оси. Положеніе оптическихъ осей и оптического эллипсоида тогда опредѣляется точно.

2. Менѣе точно опредѣляется положеніе оптического эллипсоида, когда въ полѣ зрѣнія одна оптическая ось и одна биссектриса угла между оптическими осями.

3. Еще менѣе точно, — когда въ полѣ зрѣнія лежитъ только одна оптическая ось.

Приемы наблюденій во всѣхъ этихъ случаяхъ указаны Бекке ¹⁾. Какъ уже было отмѣчено выше, въ каждомъ изъ этихъ приемовъ можно выдѣлить два существенно отличныхъ момента. Во первыхъ, — мы опредѣляемъ положеніе особой точки интерференціонной фигуры, отвѣчающей искомому направленію, внутри интерференціонной фигуры. Во вторыхъ, отъ координатъ этой точки, опредѣляющихъ ея положеніе въ интерференціонной фигурѣ, переходимъ къ координатамъ коррелятивнаго ей направленія въ пространствѣ. Мы можемъ разрѣшить обѣ эти задачи или путемъ непосредственнаго измѣренія координатъ особой точки фигуры съ помощью приспособленнаго для этой цѣли окуляра и затѣмъ вычисленія, или можемъ рѣшить задачу графическимъ путемъ, получивъ изображеніе интерференціонной фигуры. Съ первымъ изъ способовъ встречаемся отчасти въ методѣ Маллера для опредѣленія угла оптическихъ осей. Здѣсь, какъ извѣстно, измѣряемъ непосредственнымъ наблюденіемъ разстояніе отъ центра поля зрѣнія до точки интерференціонной фигуры, отвѣчающей оптической оси, и затѣмъ вычисляемъ по формулѣ $d = k \sin E$ уголъ наклона оптической оси (по выходѣ въ воздухъ) къ оси микроскопа. Второй способъ развитъ Бекке. Рѣшеніе задачи отъ начала до конца графическимъ путемъ выполняется при примѣненіи его рисовальнаго сто-

¹⁾ Кроме неоднократно цитированной работы Бекке надо указать на его статью объ опредѣленіи $2V$ по искривленію гиперболъ въ *Tscherm. Min. u. Petr. Mitt.* В. XXIV гдѣ разбирается 3-ій случай. Бекке во всѣхъ трехъ случаяхъ ставитъ задачей опредѣленіе $2V$, но такъ какъ при этомъ опредѣляется положеніе обихъ оптическихъ осей, то можно разсматривать эту задачу, какъ отысканіе положенія эллипсоида.

лика. При этомъ мы получаемъ изображеніе интерференціонной фигуры посредствомъ рисовальнаго аппарата на соотвѣтственно центрированномъ вращающемся рисовальномъ столикѣ. Одновременнымъ вращеніемъ съодной и той же угловой скоростью какъ препарата, такъ и этого столика, достигается все время сохраняющееся подобіе и параллельность въ расположеніи интерференціонной фигуры и ея изображенія на столикѣ.

Получивъ такимъ образомъ изображеніе интерференціонной фигуры, можно графическимъ путемъ рѣшать вопросы о расположеніи направленій въ кристаллѣ, отвѣчающихъ точкамъ фигуры.

О геометрической связи точекъ интерференціонной фигуры съ соотвѣтствующими направленіями въ кристаллѣ уже было сказано выше (стр. 203—204).

Вслѣдствіе подобія полученнаго изображенія интерференціонной фигуры съ самой этой фигурой, имѣетъ мѣсто такое соотношеніе между d — разстояніемъ точки изображенія отъ центра его, δ — угломъ наклона въ минералѣ соотвѣтствующаго направленія къ оси микроскопа и n — показателемъ преломленія минерала, который съ достаточною для практическихъ цѣлей точностью можно считать приблизительно постояннымъ:

$$d = k n \sin \delta$$

Изъ опыта можно найти k для данной оптической системы микроскопа и рисовальнаго столика. (Обыкновенно пользуются шлифомъ, въ которомъ видна оптическая ось и извѣстенъ уголъ ея съ перпендикуляромъ къ шлифу въ воздухѣ (δ'). Мы можемъ вычислить величину $n \sin \delta = \sin \delta'$. Наблюденіемъ получаемъ d , и вычисляемъ k или, еще проще, всё вычисленія, можно замѣнить графическимъ построеніемъ). Зная k и n можемъ найти $R = k n$, и только что написанная формула приметъ тогда видъ:

$$d = R \sin \delta$$

Это-та же связь между разстояніемъ ортогональной проекціи точки сферы отъ центра и угломъ отвѣчающаго ей радіуса съ перпендикуляромъ къ плоскости проекцій. Поэтому, описывая изъ центра изображенія окружность радіусомъ R , мы получаемъ на чертежѣ пересѣченіе сферы съ плоскостью про-

екцій (плоскость чертежа), а каждая изъ точекъ изображенія является ортогональной проекціей конца радіуса этой сферы, параллельнаго отвѣчающему этой точкѣ интерференціонной фигуры направленію. Для рѣшенія различныхъ вопросовъ, для отысканія разныхъ угловъ мы можемъ или воспользоваться прямо приѣмами начертательной геометріи, или перейти къ проекціи стереографической.

Обратимся къ тѣмъ тремъ случаямъ, въ которыхъ возможно опредѣленіе положенія оптического эллипсоида.

1. Случай, когда обѣ оптическія оси находятся въ полѣ зрѣнія. Зарисовывая изогіры при разныхъ поворотахъ столика микроскопа и одновременно, столика рисовальнаго прибора, мы получимъ точки вращенія каждой изъ вѣтвей гиперболы, отвѣчающія оптическимъ осямъ. На нашемъ рисункѣ это будутъ точки пересѣченія изогирь, зарисованныхъ въ разныхъ положеніяхъ столика. Уголъ между оптическими осями проще всего найти построеніемъ начертательной геометріи, какъ это указано у Бекке¹⁾.

2. Въ полѣ зрѣнія находится одна изъ оптическихъ осей и острая биссектриса. Находимъ точку, отвѣчающую оптической оси, какъ въ предыдущемъ случаѣ. Приводимъ изогіру къ виду темнаго креста съ вѣтвями, параллельными главнымъ сѣченіямъ николей, и отмѣчаемъ на рисовальномъ столикѣ центръ этого креста и направленіе вѣтвей. Переходимъ къ стереографической проекціи и вводимъ поправку на уклоненіе центра креста отъ точки, отвѣчающей острой биссектрисѣ. Нужный для этого уголъ V измѣряемъ, пренебрегая въ нервомъ приближеніи такой поправкой.

3. Въ полѣ зрѣнія только одна оптическая ось. Находимъ стереографическую проекцію этой оси, какъ въ первыхъ двухъ случаяхъ. Приводя изогіру къ виду прямой балки, параллельной одному изъ главныхъ направленій николей, отмѣчаемъ это направленіе. Какъ уже было сказано, оно приблизительно параллельно слѣду плоскости ng np . Поэтому, проводя на стереографической проекціи дугу большого круга, проходящую черезъ оптическую ось и опирающуюся на діаметръ, параллельный отмѣченному направленію, получаемъ проекцію плоскости, которую съ извѣстнымъ приближеніемъ можно принять за ng np . Затѣмъ приводимъ изогіру въ діагональное (или произвольное, близкое къ нему) положеніе и отмѣчаемъ на рисовальномъ столикѣ произвольную, по возможности болѣе удаленную отъ оптической оси точку изогіры, а также направленія главныхъ сѣче-

¹⁾ 1 с. в. 91.

ній никелей. Они отвѣчаютъ направлениямъ колебаній. Перейдя къ стереографической проекціи направленія, отвѣчающаго отмѣченной точкѣ изображенія, и проводя черезъ него плоскости, дѣлающія съ плоскостью паденія (въ нашемъ случаѣ вертикальной и проходящей чрезъ данное направленіе) тѣ же углы, какіе дѣлаютъ отмѣченныя направленія съ діаметромъ, на которомъ лежитъ наша точка въ фигурѣ, — мы получимъ такимъ образомъ яслкости, въ которыхъ совершаются колебанія въ взятой нами произвольной элементарной плоской волнѣ. Примѣняя затѣмъ построеніе Френеля, получимъ проекцію другой оптической оси.

Нѣкоторое представленіе о размѣрахъ чертежа даетъ слѣдующій примѣръ.

При помощи микроскопа фирмы Giess'a (при объективѣ № 7) и рисовальнаго столика Бекке наблюдалась интерференціонная фигура пластинки мусковита, гдѣ заранѣе былъ опредѣленъ уголъ наклона оптической оси въ воздухѣ къ перпендикуляру къ пластинкѣ. Этотъ уголъ равнялся 38° . Въ рисовальномъ приборѣ (при окулярѣ № 3; фигура наблюдалась, введя линзу Бертрана) разстояніе между точками изображенія, отвѣчающими оптическимъ осямъ было 35 мм., причемъ діаметръ изображенія интерференціонной фигуры равенъ 44 мм. Отсюда находимъ уголъ E между осью микроскопа и образующей конуса, который ограничиваетъ поле зрѣнія въ воздухѣ, равнымъ 52° , и радіусъ сферы проекцій для направленій въ воздухѣ $R = 28,4$ мм. Если перейдемъ къ направленіямъ въ кристаллѣ, то для различныхъ значеній n —коэффициента преломленія кристалла, будемъ имѣть соотвѣтствующее имъ значеніе E и R , какъ это представлено въ слѣдующей таблицѣ:

$n =$	$E =$	$R =$
1,50	$31\frac{1}{2}^\circ$	42,6
1,55	$30\frac{1}{2}^\circ$	44,0
1,60	$29\frac{1}{2}^\circ$	45,4
1,65	ок. 29°	46,8
1,70	ок. 28°	48,8
1,75	ок. 27°	49,9
1,80	26°	50,9
1,85	ок. 25	52,3

Обращаясь къ приемамъ теодолитнаго метода, мы опять видимъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда опредѣленіе положенія оптического эллипсоида достигается въ сходящемся свѣтѣ, оно можетъ быть сдѣлано на универсальномъ столикѣ съ двумя осями (безъ оси H). Въ самомъ дѣлѣ, когда въ полѣ зрѣнія коноскопа находится оптическая ось, она можетъ быть совмѣщена съ осью микроскопа при помощи поворота внутренняго кольца универсальнаго столика (N) и наклона около оси I . Такимъ образомъ положеніе ея опредѣляется. Наблюдая кромѣ того направленія погасанія въ двухъ произвольныхъ положеніяхъ столика и примѣняя построеніе Френеля, найдемъ и вторую оптическую ось. Такой приемъ приложимъ въ двухъ послѣднихъ изъ трехъ упомянутыхъ выше случаевъ. Въ случаѣ же доступности обѣихъ оптическихъ осей (случай 1) опредѣленіе положенія оптического эллипсоида упрощается, и сводится къ непосредственному отысканію обѣихъ этихъ осей.

При всѣхъ этихъ наблюденіяхъ поле зрѣнія, которое мы имѣемъ, не примѣняя стеклянныхъ сегментовъ, отвѣчаетъ приблизительно полю зрѣнія микроскопа, установленнаго на сходящійся свѣтъ безъ употребленія иммерсіонныхъ системъ. Примѣненіе иммерсіонныхъ системъ увеличиваетъ поле зрѣнія, но все-таки менѣе, чѣмъ это достигается стеклянными сегментами универсальнаго столика.

Какъ видимъ, вообще для опредѣленія положенія оптического эллипсоида, а также для опредѣленія величины оптическихъ осей, обычные приемы изслѣдованія въ сходящемся свѣтѣ являются мало совершенными, но нужно указать, что въ нѣкоторыхъ особыхъ случаяхъ они могутъ оказаться полезными. Это будетъ, иржеде всего, случай весьма малаго угла оптическихъ осей, особенно при маломъ двупреломленіи. Затѣмъ, лишь въ сходящемся свѣтѣ возможно изслѣдованіе дисперсіи. При изслѣдованіи на универсальномъ столикѣ въ параллельномъ свѣтѣ доступно лишь качественное опредѣленіе характера дисперсіи оптическихъ осей: $\rho > v$ или $\rho < v$. Когда мы приводимъ на универсальномъ столикѣ оптическую ось минерала въ совмѣщеніе съ осью микроскопа, то при внимательномъ наблюденіи замѣтно окрашиваніе минерала по одну сторону отъ положенія наиболѣе совершенной темноты въ буроватый, а по другую—въ синеватый цвѣтъ. Въ первомъ случаѣ вертикальна оптическая ось синихъ лучей, во второмъ красныхъ. Та и другая не совпадаютъ между собою. Отсюда и можно опредѣлить характеръ дисперсіи. При нѣкоторомъ навыкѣ это явленіе различается въ большинствѣ минераловъ, для которыхъ

указана эта характеристика въ таблицахъ (Michel-Lévy, Rosenbusch'a и др.), даже въ такихъ минералахъ, какъ мусковитъ, для котораго дисперсія въ таблицахъ названа слабой. Но для дальнѣйшаго, количественнаго изученія дисперсіи необходимо прибѣгать къ сходящемуся свѣту, пользуясь, напримѣръ, методомъ, указаннымъ проф. Е. С. Федоровымъ ¹⁾ и затѣмъ примѣнявшимся В. Н. Соколовымъ ²⁾.

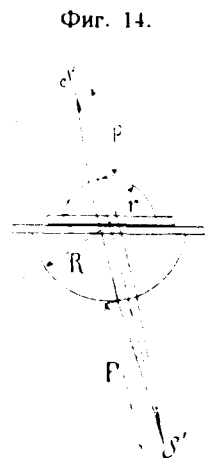
§ 6. Нѣсколько замѣчаній о приемахъ наблюденія въ сходящемся свѣтѣ.

Обратимся опять къ полученію интерференціонной фигуры въ коноскопѣ. Какъ было сказано, каждую точку интерференціонной фигуры можно разсматривать, какъ результатъ переобразования нѣкоторой элементарной плоской волны, проходящей черезъ кристаллъ въ опредѣленномъ направленіи. При помощи верхней, образующей фигуру, линзы коноскопа (обыкновенно такой линзой служитъ объективъ микроскопа) эта элементарная плоская волна превращается въ сходящуюся сферическую, центръ которой и является соответствующей точкой S интерференціонной фигуры. Но если мы обратимся къ явленіямъ преломленія въ конденсорѣ, то мы должны притти къ представленію о нѣкоторой свѣтящейся точкѣ S', которая геометрически такъ же связана съ разсматриваемой элементарной плоской волной, какъ и S. Эта точка S' является центромъ элементарной расходящейся волны, преобразующейся конденсоромъ въ элементарную плоскую волну. Очевидно, что S' геометрически гомологична S. Если поставить условіе, чтобы элементарная волна, проходящая черезъ кристаллъ была строго плоской, то изъ этого условія выведемъ, что какъ точка S такъ и S' находятся на вполнѣ опредѣленномъ разстояніи отъ образующей фигуру линзы и отъ конденсора. Вслѣдствіе непрерывности въ измѣненіи оптическихъ свойствъ кристалла по закону эллипсоида при небольшихъ отклоненіяхъ въ направленіи распространенія волнъ ихъ свойства (направленія колебаній, $n'_g - n'_p$) также мало мѣняются. Поэтому, если вмѣсто элементарныхъ совершенно плоскихъ волнъ возьмемъ элементарныя волны, немного уклоняющіяся

отъ этой формы, то, хотя вмѣсто точки интерференціонной фигуры S, получимъ другія точки S₁ и S₂, расположенныя ближе или дальше S отъ образующей линзы, но въ свойствахъ этихъ точекъ мы практически не замѣтимъ существенныхъ измѣненій. Этимъ объясняется, что интерференціонная фигура обладаетъ нѣкоторой глубиной: если, напримѣръ, разсматривать ее съ помощью какой либо оптической системы, составленной подобно микроскопу изъ объектива (нмѣ служить обыкновенно въ такой вспомогательной системѣ линза Бертрана) и окуляра, то, перемѣщая объективъ этой вспомогательной системы въ довольно широкихъ предѣлахъ, не замѣтимъ существенныхъ измѣненій въ интерференціонной фигурѣ, хотя бы точка S и выходила при этомъ нѣсколько изъ фокуса объектива. Это обстоятельство необходимо всегда имѣть въ виду при изслѣдованіи интерференціонныхъ фигуръ, полученныхъ какимъ бы то ни было способомъ.

Перейдемъ теперь, послѣ этого предварительнаго замѣчанія, къ образованію интерференціонной фигуры вслѣдствіе явленія преломленія въ сегментахъ универсальнаго столика микроскопа (фиг. 14).

Совершенно ясно, что мы можемъ разсматривать сегменты универсальнаго столика, какъ конденсоръ и какъ верхнюю линзу коноскопа, образующую интерференціонную фигуру. Выдѣляя внутри минерала элементарную плоскую волну, мы послѣ выхода ея изъ верхняго сегмента столика получимъ сходящуюся волну, которая дастъ точку интерференціонной фигуры. Ходъ лучей представленъ на фиг. 14. По извѣстной формулѣ преломленія въ сферическихъ стеклахъ:



$$\frac{1}{p} + \frac{n}{p'} = \frac{1}{r} (n - 1) \dots \dots \dots (1)$$

Въ нашемъ случаѣ лучи внутри сегмента параллельны, слѣдовательно $p' = \infty$; показатель преломленія стекла сегмента $n = 1,524$. Принявъ это во вниманіе, представимъ формулу (1) въ видѣ:

$$p = 1,91 r \dots \dots \dots (2)$$

¹⁾ E. von Fedorow — „Axendispersionarten und ihre Bestimmung“. Zeitschr. für Krist. u. Min. B. XXXVII, S. 143—150.

²⁾ «Оптическіе символы нѣкоторыхъ минераловъ». Кратк. сообщ. Эти Зап. Т. I, стр. 167 и «Оптическіе символы нѣкоторыхъ минераловъ. Интерферен. фиг. слюды». Тоже. Т. III, стр. 159.

Обыкновенно радиусъ верхняго сегмента дѣлается равнымъ 6 мм.; разстояніе интерференціонной фигуры отъ верхняго сегмента получаемъ равнымъ 11,46 мм. или приблизительно $p = 11,5$ мм. По той же формулѣ (2) можно найти и разстояніе (P) соответственныхъ фигуръ освѣщающихъ точекъ отъ нижняго сегмента. При обыкновенныхъ размѣрахъ его $R = 10$ мм. и $P = 19,1$ мм.

Чтобы видѣть образующуюся такимъ путемъ интерференціонную фигуру, очевидно необходимо, какъ при всякихъ наблюденіяхъ въ сходящемся свѣтѣ, выполнить условіе, чтобы лучи, прошедшіе черезъ изслѣдуемый разрѣзъ кристалла, не смѣшивались съ лучами, прошедшими черезъ сосѣднія съ нимъ зерна. Въ обычныхъ петрографическихъ шлифахъ это условіе, конечно, не выполнимо, но если взять достаточно большую кристаллическую пластинку или излировать ее отъ другихъ зеренъ, то, вынувъ и объективъ, и окуляръ микроскопа, и разсматривая пластинку черезъ анализаторъ, мы увидимъ интерференціонную фигуру. Она ограничивается при такомъ способѣ наблюденія ярко освѣщеннымъ ромбомъ, представляющимъ изображеніе нижняго отверстія поляризатора, которое образуется вслѣдствіе преломленія прошедшихъ черезъ него лучей въ освѣтительной линзѣ и обоихъ сегментахъ столика, представляющихъ вмѣстѣ вторую линзу. Это изображеніе отверстія поляризатора не совпадаетъ, впрочемъ, съ мѣстомъ образованія наилучшей интерференціонной фигуры. Оно находится въ 12,5 мм. отъ центра столика, тогда какъ наиболѣе отчетливая фигура отстоитъ отъ него на 17,5 мм.

Можно также разсматривать интерференціонную фигуру, образуемую верхнимъ сегментомъ столика, и съ помощью микроскопа, поднявъ его тубусъ такъ, чтобы фигура была въ фокусѣ микроскопа. При этомъ ясно наблюдается указанная выше особенность интерференціонной фигуры: она обладаетъ нѣкоторой глубиной, но можно, передвигая тубусъ микроскопа, выбрать положеніе его, отвѣчающее наиболѣе рѣзкой фигурѣ интерференціи. Нетрудно убѣдиться непосредственнымъ измѣреніемъ перемѣщенія тубуса, что въ этомъ положеніи мы разсматриваемъ фигуру, находящуюся на разстояніи 17,5 мм. отъ столика (или на разстояніи $p = 11,5$ мм. отъ поверхности верхняго сегмента). Поле зрѣнія также ограничено ромбическимъ очертаніемъ изображенія нижняго отверстія поляризатора, но послѣднее не приходится въ фокусѣ микроскопа и потому представляется расплывчатымъ. Такимъ образомъ мы не можемъ использовать всего поля зрѣнія микроскопа. Чтобы достигнуть этого, необходимо ввести вспомога-

тельную линзу между столикомъ и освѣтителемъ¹⁾, тогда очертанія ромба раздвинутся, и все поле зрѣнія микроскопа будетъ освѣщеннымъ.

Нетрудно опредѣлить угловое отверстіе конуса направленій, ограничивающихъ интерференціонную фигуру при этомъ способѣ наблюденія. Если диаметръ поля зрѣнія микроскопа назовемъ d , то очевидно уголъ U между образующей этого конуса и осью микроскопа найдется по формулѣ:

$$\sin U = \frac{d}{2(p+r)}$$

У микроскоповъ фирмы Фуэсса, при окулярѣ № 2 и различныхъ объективахъ, d и U мѣняются такимъ образомъ:

Объективъ №:	d .	$2U$.
0	4,75	$15\frac{1}{2}^\circ$
2	2,8	$9\frac{1}{2}^\circ$
4	1,6	$5\frac{1}{2}^\circ$

Вмѣсто того, чтобы передвигать тубусъ микроскопа, можно ввести линзу Бертрана (подобно тому, какъ это дѣлается при измѣреніи угла наклона оси H универсальнаго столика). Величина угла U при этомъ, конечно, вообще измѣнится. При объективѣ № 0 и № 2 она почти одинакова; въ этихъ условіяхъ $2U = 15 - 16^\circ$. При объективѣ № 4, когда микроскопъ установленъ безъ линзы Бертрана на ясное зрѣніе, но препарату, пучки лучей образующихъ интерференціонную фигуру, перехватываются объективомъ до образованія интерференціонной фигуры, и она получается уже между линзами объектива. Такимъ путемъ $2U$ увеличивается до 27° .

Величину $2U$ можно найти въ каждомъ случаѣ опытнымъ путемъ, взявъ сѣченіе минерала, въ которомъ видна оптическая ось. Получивъ интерференціонную фигуру, мы, наклоняя столикъ, можемъ

¹⁾ Можно воспользоваться просто лупой, положивши ее на освѣтитель; иногда приходится еще опускать поляризаторъ.

привести точку, отвѣчающую оптической оси, на одинъ конецъ діаметра фигуры, затѣмъ на другой и по разности отсчетовъ опредѣлить $2U$.

Описанный способъ получения интерференціонныхъ фигуръ и ихъ наблюденія не примѣнимъ болѣею частью при петрографическихъ изслѣдованіяхъ, такъ какъ необходимымъ условіемъ является значительная величина изслѣдуемыхъ зеренъ ¹⁾, но при тѣхъ микроскопическихъ изслѣдованіяхъ, когда это условіе можетъ быть осуществимо, онъ является весьма удобнымъ и очень точнымъ. Онъ совмѣщаетъ въ себѣ преимущества теодолитнаго метода и способа изслѣдованія въ сходящемся свѣтѣ. Такъ же, какъ въ первомъ, мы можемъ совмѣщать любое направленіе въ кристаллѣ съ осью микроскопа или съ осью I столика и изображать расположеніе разныхъ направленій въ стереографической проекціи, но о совмѣщеніи того или другого направленія съ осью микроскопа или осью I мы судимъ по формѣ изогирь. Когда съ осью I столика совмѣщена одна изъ осей оптического эллипсоида, мы видимъ прямую изогирь, совпадающую съ вертикальной нитью окулярнаго креста. При вращеніи около оси I она остается прямою и совпадающей съ этой нитью ²⁾. Если совмѣститъ оптическую ось однооснаго кристалла съ осью микроскопа, увидимъ темный неподвижный крестъ съ вѣтвями, совпадающими съ окулярными нитями. Въ двусосныхъ кристаллахъ въ этомъ случаѣ имѣемъ балку, проходящую черезъ пересѣченіе нитей, и при вращеніи столика около оси A она вращается въ обратную сторону, все время проходя черезъ пересѣченіе нитей.

Для полученія хорошихъ изогирь нужно конечно въ слабо двупреломляющихъ минералахъ брать шлифы потолще. Употребляя линзу Бертрана, кромѣ обычнаго центрированія, для избѣжанія ошибки отъ параллакса при измѣреніяхъ слѣдуетъ еще слѣдить, чтобы эта линза была такъ расположена, чтобы разсматриваемое черезъ окуляръ изображеніе фигуры приходилось въ плоскости окулярнаго креста. При соблюденіи этихъ условій получаютъ хорошіе результаты. Кромѣ того этотъ способъ является неза-

¹⁾ Примѣняя діафрагмированіе (въ особенности съ окуляромъ Чапскаго и съ лупой Клейна), можно конечно до нѣкоторой степени ослабить этотъ недостатокъ.

²⁾ Поскольку на это не вліяетъ разница въ показателяхъ преломленія минерала и сегментовъ (См. проф. В. В. Никитина—Универсальный методъ Федорова, стр. 92—95). Вліяніе ея при обычномъ изслѣдованіи болѣею частью ускользаетъ отъ наблюденія, тогда какъ при описываемомъ способѣ наблюденія оно замѣтно сказывается.

мѣнимымъ при точномъ изслѣдованіи дисперсіи. Онъ и примѣнялся съ этою цѣлью проф. Е. С. Федоровымъ и В. И. Соколовымъ ¹⁾.

Очень удобно можно воспользоваться такимъ пріемомъ для демонстраціи свойствъ изогирь. Изъ двусосныхъ кристалловъ хорошо пользоваться пластинкой мусковита, отдѣленной по спайности и имѣющей такую толщину, что она даетъ свѣтло-желтоватую интерференціонную окраску I порядка. Помѣстивъ такую пластинку между сегментами, и наклоня различнымъ образомъ столикъ, можно получить разнообразныя типы изогирь, характерныхъ для двусоснаго кристалла: асимметричныя; симметричныя *Reichel-Isoguten*; *Fächer-Isoguten*; изогирь, вращающіяся около оптической оси и т. п. Можно прослѣдить измѣненія въ скоростяхъ движенія концовъ изогирь въ разныхъ сѣченіяхъ, разрывъ изогирь на двѣ гиперболическія вѣтви и др. Нужно только для этой цѣли избѣгать пластинокъ съ оптическими аномаліями, описанными В. И. Соколовымъ (I. с.).

Замѣтимъ еще, что можно наблюдать интерференціонную фигуру, образующуюся при изслѣдованіи на универсальномъ столикѣ, по способу Клейна, разсматривая въ лупу, или просто невооруженнымъ глазомъ изображеніе ея, даваемое объективомъ и окуляромъ. Оно находится при объективѣ 0 и окулярѣ 2 въ микроскопѣ Фуэсса на разстояніи 12—14 мм. надъ окуляромъ. Поэтому при обычномъ изслѣдованіи по теодолитному методу, установивъ оптическую ось минерала вертикально, можно видѣть вращающуюся балку интерференціонной фигуры, если просто смотрѣть на окуляръ, отодвинувъ глазъ по оси микроскопа на разстояніе яснаго зрѣнія отъ окуляра. Эта балка видна, даже если минералъ не занимаетъ всего поля зрѣнія, такъ какъ удаленіе глаза отъ окуляра дѣйствуетъ, какъ діафрагма ²⁾. Такимъ образомъ, а еще лучше съ лупой, иногда можно хорошо различать характеръ дисперсіи оптическихъ осей, выражающейся здѣсь въ различной окраскѣ (синеватой и желтоватой) краевъ балки. Угловое отверстіе такой фигуры около 10° . Поэтому балка очень расплывчата.

Что касается обычныхъ пріемовъ изслѣдованія въ сходящемся свѣтѣ, то, какъ мы видимъ, по сравненію съ теодолитнымъ методомъ примѣненіе сходящагося свѣта, вообще говоря, является менѣе совершеннымъ способомъ, такъ какъ по самому существу метода оно не можетъ дать болѣе, чѣмъ изслѣдованіе на двусосномъ универсальномъ столикѣ. Но для того, чтобы отдать себѣ отчетъ въ значеніи этого способа изслѣдованія, необходимо еще считаться съ предѣлами примѣненія его, которые ставятся необходимой величиной зеренъ, и другими

¹⁾ См. сноску выше на стр. 223.

²⁾ Необходима все-таки значительная величина зерна.

условіями, съ точностью получаеваемыхъ результатовъ и источниками ошибокъ.

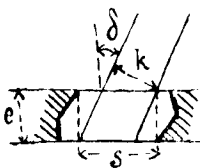
Я буду имѣть въ дальнѣйшемъ въ виду только случаи обычнаго петрографическаго изслѣдованія, такъ какъ въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ могутъ всегда встрѣтиться такія особыя условія, которыя опредѣляютъ преимущества того или другого способа изслѣдованія, независимо отъ указанныхъ причинъ.

Необходимое условіе для полученія ясной интерференціонной фигуры заключается въ томъ, чтобы въ образованіи ея принимали участіе элементарныя волны, прошедшія только черезъ изслѣдуемый кристаллъ. Поэтому, если кристаллъ не занимаетъ всего поля зрѣнія, къ этимъ волнамъ примѣшиваются постороннія элементарныя волны, прошедшія черезъ другія зерна, и фигура дѣлается неясной. Необходимо тогда діафрагмированіемъ сузить поле зрѣнія микроскопа.

Въ микроскопахъ Фуэсса, при объективѣ № 7 и окулярѣ № 2, діаметръ поля зрѣнія около 0,5 мм. Діафрагмой, помещающейся при линзѣ Бертрана, можно уменьшить эту величину вдвое или даже втрое. Употребляя окуляръ Чапскаго съ лупой Клейна, можно добиться полученія интерференціонныхъ фигуръ въ зернышкахъ величиною около 0,05 мм. въ поперечникѣ. Еще болѣе мелкія зерна можно изслѣдовать, примѣняя болѣе сильныя объективы съ иммерсіонной системой.

При изслѣдованіи по теодолитному методу предѣльная минимальная величина зерна опредѣляется слѣдующимъ соображеніемъ. Необходимо, чтобы при наибольшихъ наклонахъ, которые приходится дѣлать на столикѣ, размеры зерна позволяли достаточно ясно слѣдить за нарушеніемъ или сохраненіемъ темноты. Можно принять, что для этого достаточно, чтобы

Фиг. 15.



изображеніе зерна при наклонѣ, получающееся въ плоскости окулярнаго креста, было не меньше 0,25 мм. (при окулярѣ № 2). Эта величина при объективѣ № 2 отвѣчаетъ дѣйствительному размеру $k = 0,05$ мм. Тогда, какъ ясно изъ фиг. 15, найдемъ слѣдующее выраженіе для предѣльной величины зерна при наклонѣ δ°

$$S = \frac{k}{\cos \delta} + e \operatorname{tang} \delta$$

гдѣ e — толщина шлифа. Обыкновенно $e = 0,025$ мм.; δ можно принять 60° . Тогда $S = 0,15$ мм. Пользуясь

объективомъ № 4 и болѣе сильнымъ окуляромъ, можно еще нѣсколько понизить эту величину. Болѣе сильныя увеличенія при существующей конструкціи микроскопа не примѣнимы; поэтому надо признать, что при изслѣдованіи мелкихъ зеренъ примѣненіе сходящагося свѣта можетъ оказаться иногда полезнымъ, въ особенности для различія одноосности и двуосности и оптическаго знака минерала, что въ большинствѣ случаевъ легко разрѣшается.

Однако надо всегда имѣть въ виду возможность встрѣтить особыя сѣченія минерала или близкія къ нимъ. Какъ мы видѣли выше, въ нѣкоторыхъ случаяхъ различіе одноосныхъ и двуосныхъ или совсѣмъ невозможно, или очень трудно и ненадежно. Наиболѣе надежными являются разрѣзы, близкіе къ круговымъ сѣченіямъ оптическаго эллипсоида, т. е. съ болѣе низкими интерференціонными цвѣтами.

При опредѣленіи положенія оптическаго эллипсоида въ сходящемся свѣтѣ приходится считаться еще съ требованіемъ, чтобы одна изъ оптическихъ осей могла быть непосредственно найдена наблюденіемъ. На универсальномъ столикѣ опредѣленіе положенія эллипсоида всегда возможно¹⁾, и это составляетъ одно изъ его главныхъ преимуществъ. Посмотримъ, какова вѣроятность встрѣчи сѣченій, въ которыхъ опредѣленіе положенія эллипсоида достижимо въ сходящемся свѣтѣ. Если уголъ между осью микроскопа и образующей конуса, ограничивающаго поле зрѣнія внутри минерала, равенъ E , то, очевидно, описывая на сферѣ около каждаго изъ выходовъ оптическихъ осей малый кругъ радіуса E , мы очертимъ ими площадь, отношеніе которой къ площади полусферы и будетъ величиной искомой вѣроятности. Въ кристаллѣ одноосномъ эта величина равна $2 \sin^2 \frac{E}{2}$, въ двуосныхъ она мѣняется въ зависимости отъ величины угла оптическихъ осей, заключена между предѣлами $2 \sin^2 \frac{E}{2}$ и $4 \sin^2 \frac{E}{2}$ и всегда меньше единицы. При употребленіи объектива № 7 въ микроскопахъ Фуэсса она колеблется въ предѣлахъ всего 0,2 — 0,3 въ зависимости отъ коэффициента преломленія минерала.

Вопросъ о сравнительной точности измѣреній при изслѣдованіи по теодолитному методу и въ сходящемся свѣтѣ особенно усложняется въ силу того, что многое здѣсь зависитъ отъ навыка наблюдателя. Ограничимся указаніемъ главныхъ объективныхъ причинъ ошибокъ. Изогиры, которыя мы наблюдаемъ въ коноскопѣ, являются всегда въ видѣ

¹⁾ См. В. В. Никитина—„Универсальный методъ Федорова“ стр. 96.

болѣе или менѣе широкихъ балокъ, ширина которыхъ зависитъ отъ ориентировки кристалла, отъ величины угла оптическихъ осей, отъ двупреломленія и толщины шлифа. Наиболѣе рѣзкія балки имѣемъ въ сѣченіяхъ, близкихъ къ перпендикулярности оптическимъ осямъ. Хотя края балки ступеневаются и не рѣзки, но все-таки можно приблизительно оцѣнить ея ширину. Употребляя рисовальный приборъ Бекке, при объективѣ № 7 и окулярѣ № 3 микроскопа Фуэсса, мы получаемъ въ обычныхъ петрографическихъ шлифахъ для такихъ минераловъ, какъ авгитъ, энидотъ и т. п. балки толщиной около 4—5 м.м.; для мусковита эта величина уменьшается до 3—3,5 м.м.; для полевого шпата возрастаетъ до 10 м.м. и больше. (Эти цифры получены непосредственнымъ измѣреніемъ на рисовальномъ столикѣ и въ сѣченіяхъ близкихъ къ перпендикулярности оптической оси). Зарисовывая положеніе изогирь, мы проводимъ линію, отвѣчающую ея серединѣ, опредѣляя ее на глазъ. Въ этомъ заключается первый источникъ ошибокъ при самомъ опредѣленіи положенія оптической оси. При условіяхъ, указанныхъ выше, ошибка въ 1° отвѣчаетъ ошибкѣ въ чертежѣ 0,7—0,9 миллиметра.

При изслѣдованіи на универсальномъ столикѣ мы, встрѣчаемся съ совершенно аналогичнымъ явленіемъ. Положеніе минерала на столикѣ при установкѣ его на темноту, сохраняющуюся при вращеніи около той или другой оси столика, приходится обыкновенно опредѣлять какъ среднее изъ каждой пары близкихъ къ нему положеній, гдѣ замѣчается слабое нарушеніе темноты въ одинаковой въ обѣихъ случаяхъ степени. Напримѣръ, отыскивая положеніе оптической оси, мы останавливаемся на серединѣ между тѣми двумя положеніями столика по обѣ стороны отъ искомаго, при которыхъ замѣчается одинаковое слабое просвѣтленіе. Это тотъ же самый приемъ, который употребляется постоянно и при опредѣленіи направленій погасанія при изслѣдованіи въ параллельномъ свѣтѣ на простомъ (не наклоняющемся) столикѣ, чтобы увеличить точность отчета.

Очевидно, что ширина изогирь, наблюдающейся въ сходящемся свѣтѣ, обратно пропорциональна чувствительности установки зерна на темноту на универсальномъ столикѣ.

При опредѣленіи въ сходящемся свѣтѣ положенія оптической оси имѣетъ мѣсто только этотъ источникъ ошибокъ, если не считать погрѣшностей, зависящихъ отъ несовершенства прибора. Когда опредѣляемъ положеніе острой биссектрисы по положенію отвѣчающаго ей темнаго креста, то во-первыхъ

увеличивается ошибка влѣдствіе расплывчатости изогирь, а во-вторыхъ, являегя новый источникъ ошибокъ отъ неправильно принятой поправки для положенія биссектрисы (см. выше стр. 219).

Наконецъ, при опредѣленіи положенія эллипсоида по наблюденіямъ измѣненія формы изогирь, въ шлифѣ, гдѣ видна только одна оптическая ось, можно указать цѣлый рядъ погрѣшностей. Главнѣйшія изъ нихъ—ошибка, происходящая отъ расплывчатости изогирь по мѣрѣ приближенія къ краю поля зрѣнія, и неизбежное возрастаніе сдѣланной ошибки при графическомъ построеніи Френеля.

Мы видимъ тутъ уже источники ошибокъ исключительно свойственные методу изслѣдованія въ сходящемся свѣтѣ. Кромѣ того надо считаться съ очень важнымъ обстоятельствомъ, что сдѣланныя ошибки при такомъ изслѣдованіи не могутъ быть обнаружены. Тогда какъ при изслѣдованіи на универсальномъ столикѣ совершенно независимо другъ отъ друга могутъ быть всегда опредѣлены двѣ, а иногда и всѣ три оси оптического эллипсоида, и слѣдовательно, отклоненіе угловъ между ними отъ 90° является очевиднымъ мѣриломъ неточности наблюденія, при изслѣдованіи въ сходящемся свѣтѣ ошибки остаются скрытыми отъ наблюдателя. Это относится не только къ случайнымъ ошибкамъ наблюденія, но и къ тѣмъ, которыя зависятъ отъ невѣрной оцѣнки коэффиціента преломленія и отъ неправильностей въ установкѣ прибора (центрировка и т. п.).

Всѣ эти причины, а также ограниченность тѣхъ случаевъ, когда примѣненіе сходящагося свѣта даетъ положительные результаты, и большая сложность и медленность работы по этому способу заставляютъ признать, что если онъ и можетъ имѣть нѣкоторое практическое значеніе, то лишь какъ дополненіе къ теодолитному методу Федорова, которое можетъ оказаться полезнымъ въ отдѣльныхъ, исключительныхъ случаяхъ. Гораздо важнѣе, на мой взглядъ, теоретическое значеніе тѣхъ представленій объ особенностяхъ различныхъ направленій въ кристаллѣ, которыя съ этимъ методомъ связываются. Представленія о системѣ конфокальныхъ сферическихъ эллипсовъ, изображающихъ направленіе погасанія въ разныхъ сѣченіяхъ, о сферическихъ кривыхъ равнаго двупреломленія и т. д. позволяютъ нагляднѣе уяснить себѣ тѣ измѣненія въ интерференціонной окраскѣ и направленіи погасаній, которыя наблюдаются въ изслѣдуемомъ кристаллѣ при различныхъ поворотахъ универсальнаго столика. Въ этомъ отношеніи такія представленія имѣютъ значеніе и для теодолитнаго метода.

19. О твердости и микроструктурѣ сплавовъ теллуриетыхъ и сѣрниетыхъ еединеній.

П. Я. Салдау.

(Доложено 14 Января).

Твердость, какъ физическое свойство тѣлъ, въ практической жизни имѣетъ не менѣе важное значеніе, чѣмъ плавкость и электропроводность и поэтому совершенно естественно, что въ послѣдніе годы все больше и больше вниманія удѣляется многими изслѣдователями явленію твердости. Главной помѣхой развитію изслѣдованія твердости было и есть то обстоятельство, что нѣтъ увѣренности въ точности полученныхъ результатовъ, такъ какъ при разныхъ условіяхъ для одного и того же вещества результаты могутъ быть разные и такимъ образомъ теряется возможность сравненія результатовъ, полученныхъ разными путями. Но тѣмъ не менѣе методы, какъ склерометрической, основанный на принципѣ, „что твердость есть сопротивленіе, которое данное тѣло оказываетъ внѣдренію въ него другого тѣла“¹⁾, такъ и Бриделя, основанный на принципѣ, „что твердость есть сопротивленіе, которое оказываетъ отчасти уже сжатое тѣло дальнѣйшему прониканію въ него другого тѣла“, приобрѣтаютъ все большее и большее примѣненіе.

Первоначально какъ тотъ, такъ и другой методъ изслѣдованія были выдвинуты лишь для испытанія прочности матеріаловъ съ цѣлью замѣнить ими испытанія матеріаловъ на разрывъ, съ каковой цѣлью Бридель и демонстрировалъ свой методъ на Парижской всемирной выставкѣ въ 1900 году²⁾. Но вскорѣ многіе изслѣдователи стали производить систематическіе опыты, чтобы получить зависимость твер-

дости отъ химическаго состава. Такъ Ридбергъ¹⁾ изслѣдовалъ простыя тѣла по отношенію измѣненія твердости въ зависимости отъ атомнаго вѣса, а Бридель и Вальбергъ занялись изслѣдованіями твердости стали въ зависимости отъ содержанія С, Si и Mn. Въ 1904 году А. П. Курдюмовъ²⁾ опубликовалъ свои изслѣдованія о мѣдноцинковыхъ сплавахъ и высказалъ мнѣніе, что твердость, какъ физическое свойство тѣлъ, должна находиться въ зависимости отъ атомнаго вѣса тѣлъ и отъ положенія, занимаемаго тѣлами въ періодической системѣ Менделѣева и что нужно полагать, что твердость, какъ и всѣ другія химическія и физическія свойства тѣлъ будетъ представлять изъ себя періодическую функцію атомнаго вѣса“. Въ томъ же году А. А. Байковъ³⁾ параллельно съ изслѣдованіями кривой плавкости сплавовъ мѣди и сурьмы производитъ изслѣдованія и твердости и доказываетъ, что методъ твердости даетъ возможность опредѣлить химическія соединенія $SbCu_2$ и $SbCu_3$. А въ 1906 году А. Л. Сапожниковъ и Я. Каневскій⁴⁾ сообщили объ изслѣдованіяхъ твердости эвтектической смѣси свинца съ сурьмой. Но все это были пока только разрозненные попытки, не вылившіяся еще въ общую систему. И лишь въ 1907 году, какъ результатъ сопоставленій данныхъ твердости съ данными электропроводности Н. С. Курнаковъ и

1) Rydberg: Die Härte der einfacher Körper. Zeitschr. für phys. Chem. (1900), 33, 353.

2) А. П. Курдюмовъ.—Монографія о мѣдноцинковыхъ сплавахъ.

3) А. А. Байковъ. — Сплавы мѣди и сурьмы. Ж. Р. Х. О. 1904 г. (133).

4) А. Л. Сапожниковъ и Я. Каневскій. — Ж. Р. Х. О. (1906) 38, 246.

1) А. П. Курдюмовъ.—Монографія мѣдноцинковыхъ сплавовъ. С.-Петербургъ 1904 г.

2) Сеппайнъ.—Новый способъ испытанія матеріаловъ и труды Бриделя. Горн. Журн. 1902 г. т. I, стр. 294.

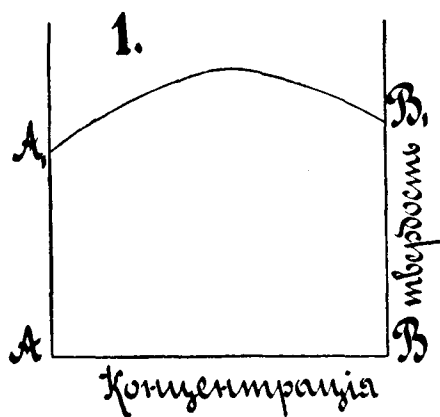
С. Ф. Жемчужный ¹⁾ опредѣлили схему соотношеній твердости съ составомъ для двойныхъ системъ,

показанную на рисункахъ 1, 2, 3 и 4, табл. I. Больше же сложные случаи могутъ быть изображены

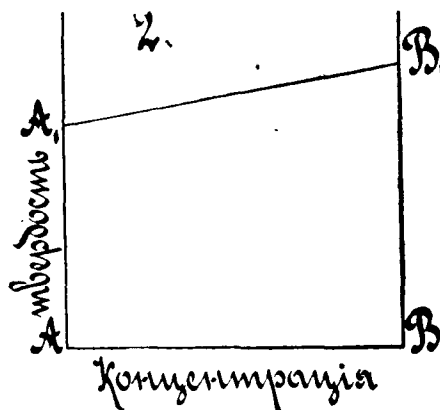
Табл. I.

Схемы методы твердости.

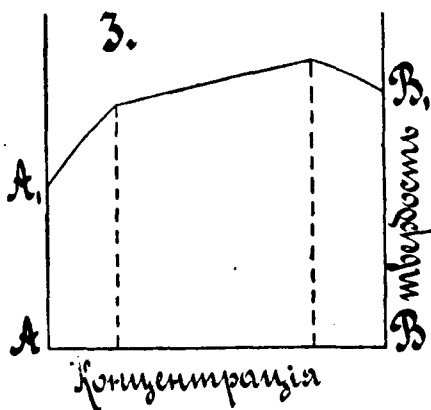
Непрерыв. рядъ
морфологическихъ состояній



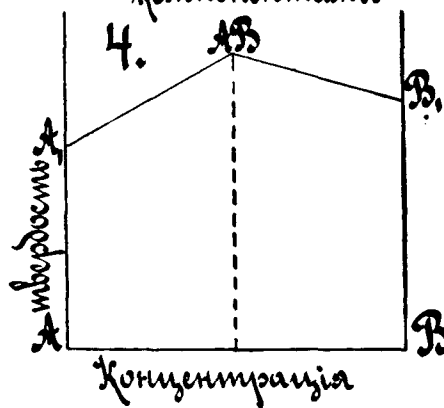
Непрерыв. рядъ
механическихъ состояній



Морфол. слъси
въ огранич. концетр.



Механич. слъси
химическ. соедин. со своими
компонентами



¹⁾ Н. С. Курнаковъ и С. Ф. Жемчужный: Твердость

металлическихъ твердыхъ растворовъ и опредѣл. химическихъ соединеній. Ж. Р. Х. О. 1907 г. (39,1148).

комбинацией этих простых. Примерами для схем 1, 2 и 3 могли служить системы уже исследованные по методу твердости:

- для 1—Au—Ag, Au—Cu,
 „ 2—Zn—Sn,
 „ 3—Ag—Cu.

Для схемы же 4 исследований по методу твердости в известной мне литературе не оказалось и поэтому я задался целью исследовать какую-либо из простых бинарных систем, компоненты которой, не образуя твердых растворов, давали бы одно определенное химическое соединение. Была выбрана система, компоненты которой находясь в двух разных как вертикальных, так и в горизонтальных рядах периодической системы Менделѣева, резко отличаются по своим химическим свойствам. Свинец обладает большим атомным весом (206,91) и металлическим характером, теллур, напротив, небольшого атомного веса (127,6) представляя переходный элемент от металлов к металлоидам, очень близок к последним и принадлежит к группѣ сѣры. Химическое же соединение (PbTe) было известно в природе в виде алтаита. Система Pb+Te была исследована уже Фаемъ и Джилльсономъ ¹⁾, определившим кривую плавкости (табл. III, фиг. 1), а также Н. А. Пушинымъ ²⁾, которым была дана кривая потенциала (табл. III, фиг. 2). Эти исследования уже указывали на некоторые осложнения в простой системѣ, но так как выводы были сделаны без изучения микроструктуры, то было решено все же остановиться на системѣ Pb+Te и при исследовании принять во внимание также и микроструктуру. Результатом этих исследований и является глава I настоящей работы. Когда же при исследовании оказалось, что образование твердых растворов со стороны PbTe, в системѣ Pb+Te, действительно имѣет мѣсто, то явился вопрос, не обладает ли таким же свойством и PbS по отношению к другим сѣрнистым и теллуристым соединениямъ. Отвѣтомъ на это служить глава II.

ГЛАВА I.

Сплавы свинца съ теллуриемъ.

Приготовление сплавовъ. Исходными материалами при изготовлении сплавовъ служили чистый свинецъ

¹⁾ Fay и Gilson. Landolt-Börnstein Physikalisch chemische Tabellen (Seite 302).

²⁾ Н. А. Пушинъ.—Потенціалъ и характеръ металлических сплавовъ. СПб. 1906 г.

и теллуръ отъ фирмы Кальбаума. Составныя части сплавились в газовой печи, в графитовыхъ тигляхъ, вставленныхъ, для болѣе равномернаго охлаждения одинъ в другой съ заполненіемъ промежутка между ихъ стѣнками пескомъ. Для предохранения отъ окисления сплавление производилось подъ слоемъ смѣси изъ приблизительно равныхъ частей KCl и LiCl, свободно выдерживавшей температуры до 1000—1150° С. Работа велась слѣдующимъ образомъ. Сначала готовилась сплавленная смѣсь KCl и LiCl в достаточномъ количествѣ, ею наполнялся тигель, нагрѣвался и когда смѣсь приходила в жидкообразное состояніе, то в тигель вносился сперва теллуръ, а потомъ свинецъ.

При этомъ наблюдалось сильное выдѣленіе тепла, о чемъ можно было судить по вспышкѣ, замѣчавшейся подъ слоемъ смѣси каждый разъ послѣ прибавленія свинца. Затѣмъ продолжалось нагрѣваніе до полного сплавления обоихъ компонентовъ, в чемъ убѣждались помѣшиваніемъ сплава форфоровой трубкой, надѣтой на желѣзную проволоку. Такое помѣшиваніе происходило и во время охлаждения до появления начала кристаллизаціи, которое ясно ощущалось по тренію мѣшалки объ образовавшіеся кристаллы. При охлажденіи были приложены всѣ усилія къ тому, чтобы избѣгнуть рѣзкихъ измѣненій температуръ. Съ этой целью постепенно уменьшалось какъ дутье, такъ и притокъ газа, замѣняя подъ конецъ горѣлку съ дутьемъ обыкновенной газовой горѣлкой. Такая операція длилась около часу, послѣ чего, закрывъ огнерстія газовой печи азбестовымъ картономъ, давали сплаву свободно остынуть. Полное же охлажденіе наступало черезъ 3—4 часа, такъ что общая продолжительность изготовленія сплава равнялась 5—6 часамъ.

По охлажденіи, чтобы избѣгнуть опасности раздробленія сплавовъ при выниманіи изъ тиглей, в виду ихъ значительной хрупкости, тигли со всѣми сплавами опускались в воду для растворенія предохраняющаго слоя, послѣ чего сплавы вынимались совершенно свободно. Далѣе корольки сплавовъ тщательно высушивались и взвѣшивались. Разница вѣса между количествомъ взятыхъ частей и полученнымъ королькомъ, не превышаетъ 0,032 gr. на 30 gr. сплава, что составляетъ не болѣе 0,1% определяемаго вещества. Поэтому, принявъ еще во внимание возможность чисто механическихъ потерь в виду мельчайшаго порошка, остающагося в тиглѣ, можно допустить, что при вышеизложенномъ способѣ изготовленія сплавовъ, потерь не было и анализъ является излишнимъ. Къ подобному же заключенію

приходить и Н. А. Пушкинъ ¹⁾. изготовлявшій сплавы свинца съ теллуромъ для изслѣдованія, по методѣ электродвижущихъ силъ растворенія.

Изслѣдование сплавовъ: а) *кривая твердости*. Полученные корольки шлифовались сверху и сбоку, а двѣ противоположныя стороны подпиливались такъ, чтобы плоскости ихъ были параллельны двумъ шлифованнымъ. Такимъ образомъ имѣлась возможность, при испытаніи на твердость по способу Бригелля, получать отпечатки сверху и сбоку, что при равенствѣ отпечатковъ могло служить доказательствомъ однородности приготовленныхъ сплавовъ. Сплавы, неудовлетворившіе условію однородности, изготовлялись сызнова. Слѣдуетъ отмѣтить, что для полученія болѣе или менѣе однородныхъ сплавовъ нуженъ нѣкоторый опытъ—нужна привычка уловить моментъ начала кристаллизаціи.

Отпечатки получались отъ 10 мм. шарика на прессѣ князя Рагагина при нагрузкѣ 50—54 клгр. и ихъ дѣлалось нѣсколько—по 2—3 на каждой изъ двухъ шлифованныхъ сторонъ. Измѣренія же диаметровъ полученныхъ отпечатковъ производились при помощи измѣрительнаго микроскопа Цейса. Для каждаго отпечатка измѣряли 4 диаметра и изъ нихъ брали средній, а потомъ изъ полученныхъ среднихъ диаметровъ для всѣхъ отпечатковъ брали еще разъ средній. По найденному такимъ образомъ среднему диаметру вычислялась площадь вогнутой поверхности отпечатка по извѣстной формулѣ $S = \frac{\pi D}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2})$, гдѣ D диаметръ шарика, равный 10 мм., а d —диаметръ полученнаго отпечатка. Дѣленіемъ нагрузки на вычисленную площадь получалось давленіе на единицу поверхности, т. е. твердость по Бригеллю.

Первые опыты производились со сплавами вѣсомъ 20 гр., но при давленіи большинство изъ нихъ лопнуло, что привело къ заключенію, что количество вещества должно быть увеличено. Поэтому двѣ послѣдующія серіи опытовъ были произведены уже со сплавами вѣсомъ 30 гр. Результаты этихъ опытовъ сведены въ таблицѣ № II по среднимъ значеніямъ для твердости вычерчена кривая твердости, показанная на табл. III, фиг. 3.

Кривая твердости, какъ видно изъ чертежа (табл. III фиг. 3), состоитъ изъ трехъ вѣтвей—двухъ прямыхъ ab и de и средней кривой bcd , оставляя пока въ сторонѣ небольшой зигзагъ со стороны свинца. На основаніи изслѣдованій Н. С. Курнакова и

С. Ф. Жемчужнаго ¹⁾ можно заключить, что въ области прямой ab происходитъ образованіе механической смѣси изъ кристалловъ чистаго свинца и химическаго соединенія $PbTe$, а въ область кривой bcd соответствуетъ образованію твердыхъ растворовъ, при чемъ определенное химическое соединеніе $PbTe$ растворяетъ въ себѣ ограниченное количество одного изъ компонентовъ Pb .

Что же касается области прямой de , то здѣсь происходитъ опять образованіе механической смѣси изъ того же химическаго соединенія $PbTe$ и чистаго теллура. Нужно замѣтить, что сплавы не отжигались, чѣмъ и объясняется нѣкоторая извилистость въ части кривой диаграммы. Что же касается зигзага со стороны свинца, то о немъ будетъ сказано при разборѣ микроструктуры сплавовъ въ этой области.

в) Микроструктура. Микроструктура вполне подтверждаетъ выводы, сдѣланные на основаніи кривой твердости. Шлифы, травленные слабымъ растворомъ азотной кислоты, начиная отъ сплавовъ съ содержаніемъ 0,5 и до свыше 40 атомныхъ % Te , соответствующіе области прямой av (табл. III), указываютъ ясно, какъ это видно изъ шлифовъ 1, 2, 3, 4 и 5, (листъ I), на образованіе эвтектики, указывающей на отсутствіе твердыхъ растворовъ въ этой области. На шлифахъ же съ 46 и 48 атомныхъ % Te , изъ области начала кривой acd , замѣтны лишь слабыя и весьма неявные признаки эвтектики, а сплавы 49, 49,5 и 49,8 атомныхъ % Te , шлифъ 6, (листъ I) совершенно однородны, что возможно лишь въ случаѣ образованія твердыхъ растворовъ.²⁾ Поэтому предѣлы твердыхъ растворовъ теллуристаго свинца со свинцомъ, указанные на кривой плавкости Фау и Двильсона (23 атомн. % Te) фиг. 1, (табл. III), а также на кривой потенциала Н. Л. Пушкина (32 атомн. % со стороны $PbTe$), фиг. 2 (табл. III) нужно считать нѣсколько преувеличенными. Мои же изслѣдованія показываютъ, что область твердыхъ растворовъ со стороны $PbTe$, въ системѣ $PbTe+Pb$, не превосходитъ 5 атомныхъ % Pb . Аналогичныя отношенія видны также въ результатахъ наслѣдованій К. Фридриха ³⁾ системы $PbS+Pb$, указы-

¹⁾ Н. С. Курнаковъ и С. Ф. Жемчужный.—«Твердость металлическихъ твердыхъ растворовъ и опредѣл. химическихъ соединений». Ж. Р. Х. О. 1907 г.

²⁾ R. Ruer: Metallographie 5.68. Leipzig 1907 г.
и Н. М. Витторфъ—Теорія сплавовъ стр. 355. СПб. 1909 года

³⁾ K. Friedrich: Mitteilungen aus dem Institut für Metallographie 5.19.

¹⁾ Н. А. Пушкинъ.—Потенціалъ и природа металлическихъ сплавовъ. Стр. 28, СПб. 1906 г.

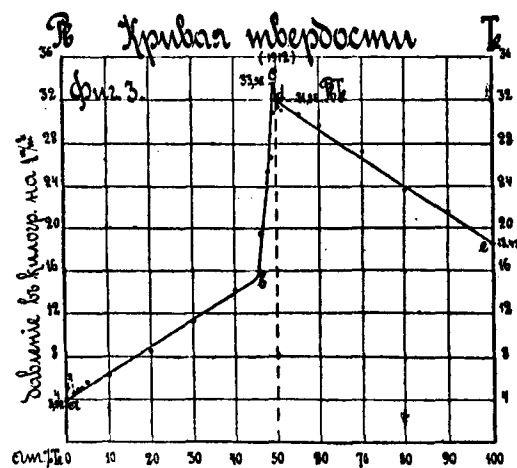
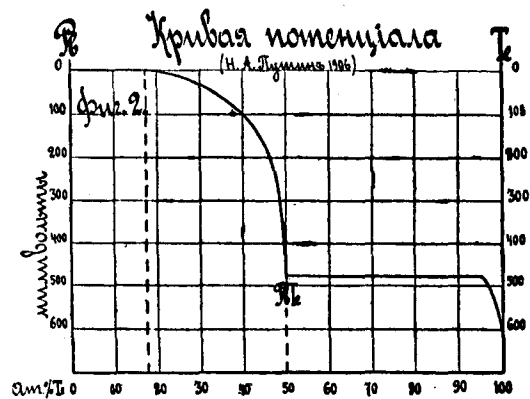
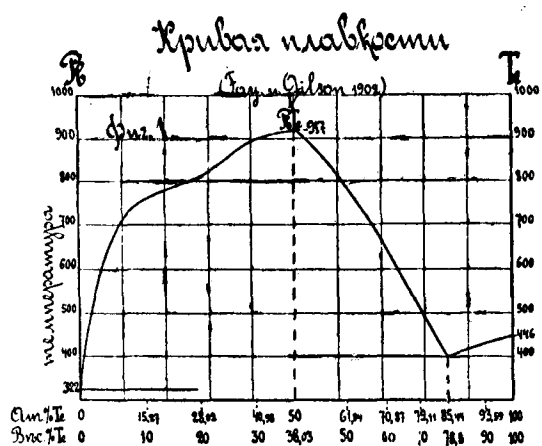
вающія, что область твердых растворов со стороны PbS находится ниже 5%. Далѣе на шлифахъ 7, 8, 9 (листъ II) и 10, 11 (листъ II) изъ области прямой *de* ясно наблюдается опять новое появленіе

эвтектики во всѣхъ сплавахъ, начиная съ 50,2 и кончая 90 атомн. % Te, что доказываетъ отсутствіе твердыхъ растворовъ теллуристаго свинца съ теллуромъ со стороны PbTe. Такъ что указаніе кривой

№ II. Таблица твердости сплавовъ Pb + Te.

Составъ.		Твердость по Бринелю.	Примѣчаніе.
Атом. %.			
Pb.	Te		
100	—	3,92	Нагрузка ±0—54 клгр.
99,5	0,5	5,065	
99	1	6,17	
98	2	4,53	
97	3	4,89	
96	4	4,97	
95	5	5,53	
90	10	6,25	
80	20	8,535	
70	30	11,33	
60	40	14,10	
54	46	19,47	
52	48	24,78	
51	49	26,535	
50,5	49,5	30,77	
50,2	49,8	33,575	
50	50	31,845	
49,8	50,2	31,135	
49	51	30,825	
45	55	30,54	
40	60	29,605	
30	70	27,30	
20	80	23,605	
10	90	21,55	
—	100	18,425	

Табл. III.



плавкости Фая и Джильсона на присутствие твердыхъ растворовъ P_6Te съ Te со стороны P_6Te въ предѣлахъ около 5% не находятъ подтвержденія. Подобный же выводъ вытекаетъ и изъ кривой потенціала Н. А. Пушкина. Что же касается области близкой къ теллуру, ниже 10 атомн. % P_6 , то вопросъ о существованіи здѣсь твердыхъ растворовъ, указанныхъ на кривой плавкости Фая и Джильсона, остается пока открытымъ, такъ какъ изслѣдованій твердости въ этой области произведено не было. Но тѣмъ не менѣе, судя по тому, что, не смотря на существованіе твердыхъ растворовъ со стороны P_6Te въ системѣ P_6Te+P_6 , они отсутствуютъ со стороны Pe , надо полагать, что твердые растворы отсутствуютъ также и со стороны Te въ системѣ P_6Te+Te . Поэтому прямая ds продолжена до ординаты теллура.

Кромѣ вышеизложеннаго, микроструктура даетъ возможность установить еще предѣлы эвтектической точки между Pe и P_6Te , не указанной на кривой плавкости Фая и Джильсона. Для этого стоитъ лишь сравнить шлифы сплавовъ съ 0,5 и 1 атомн. % Te , шлифы 1 и 2 (листъ I). На первомъ, кристаллы темны, слегка размазаны и рѣзко огличаются отъ кристалловъ послѣдующихъ шлифовъ. Это кристаллы чистаго свинца, указывающіе на то, что въ эвтектической смѣси свинецъ находится въ избыткѣ и кристаллизуется первымъ, а поэтому сплавъ съ 0,5 атомн. % Te принадлежитъ области свинцовой вѣтви. На второмъ же, кристаллы ярко блестящи, рѣзко очерчены и одинаковы съ кристаллами послѣдующихъ шлифовъ. Это кристаллы теллуристаго свинца, указывающія, что сплавъ съ 1 атомн. % Te принадлежитъ вѣтви теллуристаго свинца. Отсюда ясно, что эвтектическая точка находится между 0,5 и 1 атомн. % Te . На основаніи этого можно также полагать, что приблизительно въ такихъ же предѣлахъ находится и эвтектическая точка въ системѣ P_6S+P_6 , не указанная на кривой плавкости профессора К. Фридриха¹⁾.

Наблюдавшееся же въ области 0,5—1 атомн. % Te нѣкоторое увеличеніе твердости, должно быть объяснено болѣе мелкозернистымъ строеніемъ эвтектической структуры вещества²⁾ или быть можетъ, возможностью образованія твердыхъ растворовъ въ весьма малыхъ концентраціяхъ.

Въ концѣ считаю нужнымъ привести еще данныя твердости относительно природнаго теллури-

таго свинца (алтаита) изъ Заводинскаго рудника Алтайскаго Округа, полученнаго мною изъ Музеума Горнаго Института. Небольшіе кусочки алтаита, по всей вѣроятности вмѣстѣ съ гесситомъ (Ag_2Te) были сплавлены подъ слоемъ смѣси KCl и $LiCl$, сплавъ отшлифованъ, изслѣдованъ подъ микроскопомъ и испытанъ на твердость по способу Бриллея. Шлифъ хотя и указывалъ на неоднородность, но твердость 50,95 клгр. на 1 квадр. м-м значительно больше искусственнаго теллуристаго свинца (31,85 клгр.).

ГЛАВА II.

Сплавы PbS съ FeS , Ag_2S , Cu_2S , $PbTe$ и Sb_2S_3 .

Сплавы природнаго свинцоваго блеска съ искусственно-приготовленными, фирмой E. Merck, магнитнымъ колчеданомъ (FeS), серебряннымъ блескомъ (Ag_2S) и мѣднымъ блескомъ (Cu_2S) были изслѣдованы профессоромъ К. Фридрихомъ¹⁾ по методу плавкости. Изслѣдованія диаграммы плавкости сплавовъ природныхъ P_6S и Se_2S_3 въ настоящее время производятся А. Д. Дурдинымъ²⁾ и объ этой системѣ пока имѣются лишь предварительныя сообщенія, о которыхъ будетъ сказано при разборѣ изслѣдованія системы $P_6S+Se_2S_3$. Данныхъ же объ изслѣдованіи сплавовъ P_6S+P_6Te въ извѣстной мнѣ литературѣ не оказалось. Не задаваясь цѣлью произвести изслѣдованія для выработки полныхъ кривыхъ твердостей всѣхъ этихъ системъ, были поставлены лишь два вопроса: 1) могутъ ли перечисленные сѣрнистыя соединения образовать твердые растворы въ свинцовомъ блескѣ и 2) если могутъ, то въ какихъ, хотя бы приблизительно, предѣлахъ это происходитъ. При этомъ было рѣшено исходить изъ матеріаловъ приготовленныхъ искусственно, чтобы попутно отвѣтить и на вопросъ—являются ли примѣси въ природномъ свинцовомъ блескѣ въ видѣ механической смѣси или въ растворен. состояніи.

Матеріалы. Сѣрнистый свинецъ отъ фирмы E. Merck, при изслѣдованіи подъ микроскопомъ оказался не однороднымъ, представляя механическую смѣсь изъ P_6S и металлическаго свинца. Поэтому пришлось готовить его лабораторнымъ путемъ. Свинцовый блескъ готовился въ графитовыхъ тиг-

*) K. Friedrich. Mitteilungen aus dem Inst. für Metallographie (s. 19) Halle 1910.

2) А. Л. Сапожниковъ и Я. Каневскій. — Ж. Р. Х. О. 1906 г., 1907 и 1908 г.г.

1) K. Friedrich Metallurgie 1907, Heft. 14, 20.

2) А. Д. Дурдинъ. Ж. Р. Х. О. стр. 686. 1911 г.

ляхъ, на газовой печи, способомъ насыщения слѣдующимъ образомъ. Сначала плавил чистую кристаллическую сѣру и потомъ прибавляли свинецъ отъ фирмы Кальбаума. Происходило образование пористаго вещества, которое при дальнѣйшемъ нагрѣваніи выдѣляло блестящія капли болѣе легкоплавкой эвтектической смѣси $PbS+Pb$. По появленіи нѣкотораго количества жидкаго блестящаго сплава, прибавляли вновь маленькими кусочками кристаллическую сѣру, что вызывало опять образование такого же пористаго вещества, отличавшагося отъ первоначальнаго лишь большей плотностью. Другими словами, такимъ образомъ происходило насыщеніе эвтектической смѣси $PbS+Pb$ сѣрой до полного исчезновенія свинца и образованія однороднаго свинцоваго блеска. Такая операція повторялась нѣсколько разъ, до 20 и болѣе, до тѣхъ поръ, пока вся поверхность сплавляемаго вещества не покрылась одновременно тонкимъ однообразнымъ слоемъ блестящаго сплава. Отдѣльныя капли въ это время уже не замѣтны—признакъ, что насыщеніе достигнуто. Послѣ этого температура, достигаемая въ газовой печи 1100—1200°C, доводилась до максимума, чтобы сплавъ принялъ жидкообразное состояніе, и прибавлялось настолько значительная масса сѣры, чтобы при этой температурѣ весь сплавъ затвердѣвалъ. Потребное время для приготовленія одной заготовки свинцоваго блеска колебалось отъ 1 до 2 часовъ.

Такимъ образомъ приготовленное вещество обладало всѣми признаками свинцоваго блеска, а подъ микроскопомъ шлифы и послѣ травленія слабой азотной кислотой показывали совершенно однородную структуру. Анализъ же далъ Pb —86,87%, S —12,96%, что очень мало отличается отъ требуемаго теоретически (Pb —86,58%, S —13,42%). Поэтому оно и было признано удовлетворительнымъ для опытовъ. Что же касается другихъ матеріаловъ, то серебряный блескъ (Ag_2S) и мѣдный блескъ (Cu_2S) были изготовлены студентомъ А. Мѣдниковымъ и мною изслѣдованы подъ микроскопомъ и аналитически. Было найдено Ag —86,86% и Cu —79,02%, теоретически же требуется Ag —87,07% и Cu —79,83%. Магнитный колчеданъ (FeS) приобрѣтенъ отъ фирмы E. Merck и сурьмяный блескъ (Sb_2S_3) былъ взятъ продожный. Теллуристый же свинецъ готовился способомъ, описаннымъ въ главѣ о сплавахъ $Pb+Te$.

Приготовленіе сплавовъ. Сплавленіе производилось въ графитовыхъ тигляхъ, въ криотольной печи безъ всякаго предохраняющаго слоя, за исключеніемъ системы $PbS+PbTe$, сплавы которой изготовлялись подъ слоемъ смѣси KCl и $LiCl$, способомъ, изложеннымъ въ главѣ о системѣ $Pb+Te$. Сначала

расплавлялся PbS и потомъ кидались мелкими кусочками вторыя части сплавовъ, прибавляя вмѣстѣ съ этимъ, а также и далѣе при охлажденіи сплавовъ до момента затвердѣванія, еще нѣкоторое количество сѣры, чтобы предохранить прибавляемыя FeS , Ag_2S , Cu_2S и Sb_2S_3 отъ разложенія. Свинцовый же блескъ, какъ показали опыты К. Фридриха и Л. Леру¹⁾, при плавленіи своего состава не мѣняется, а въ убыли участвуютъ равнымъ образомъ какъ свинецъ такъ и сѣра. К. Фридрихъ и Леру нашли, что потеря природнаго свинцоваго блеска, при нагрѣваніи его до 1200° С и обратномъ охлажденіи въ той же печи, равна 8°/о съ ошибкой ± 2 °/о. Мною же, для опредѣленія потери искусственнаго свинцоваго блеска при плавленіи, были произведены три плавки въ криотольной печи, показавшія, что потеря равна 7,6°/о съ ошибкой $\pm 1,5$ °/о. Причемъ, чтобы подойти возможно ближе къ условіямъ приготовленія сплавовъ, при охлажденіи прибавлялось нѣкоторое количество сѣры. Изготовленные, изъ такимъ образомъ переплавленнаго PbS , шлифы подъ микроскопомъ представляли совершенно однородную структуру и поэтому было признано, что свинцовый блескъ при переплавленіи, въ особенности въ присутствіи сѣры, своего состава не мѣняется.

Изслѣдованіе сплавовъ. Приготовленіе и травленіе шлифовъ, а равно и опыты на твердость по способу Бринеля на прессѣ князя Гагарина производились точно такъ же, какъ и со сплавами свинца съ теллуromъ, подробно описанными въ первой главѣ. Поэтому здѣсь эта сторона изслѣдованій не описана, а приведены лишь окончательные результаты въ таблицахъ. При анализѣ сплавовъ съ FeS и Ag_2S опредѣлялся лишь одинъ элементъ Fe и Ag , по нему вычислялось содержаніе FeS и Ag_2S , а по разности до 100 получалось содержаніе PbS . Fe опредѣлялось по способу Фрезениуса титрованіемъ хлористымъ оловомъ, Ag сухимъ путемъ. Что же касается сплавовъ съ Cu_2S и Sb_2S_3 , то примѣрный составъ полученъ вычисленіемъ, полагая, на основаніи вышеупомянутаго опыта, 7,6°/о убыли за счетъ PbS , а остальное за счетъ прибавленныхъ Cu_2S и Sb_2S_3 . Сплавы $PbS+PbTe$ готовились подъ предохраняющимъ слоемъ смѣси $KCl+LiCl$ и, какъ показало контрольное взвѣшиваніе, убыль не превышала 0,1°/о опредѣляемаго вещества, поэтому было принято, что при плавленіи сплавы своего состава не мѣняются.

¹⁾ K. Friedrich Mitteilungen aus dem Inst. für Metallographie s. 17.

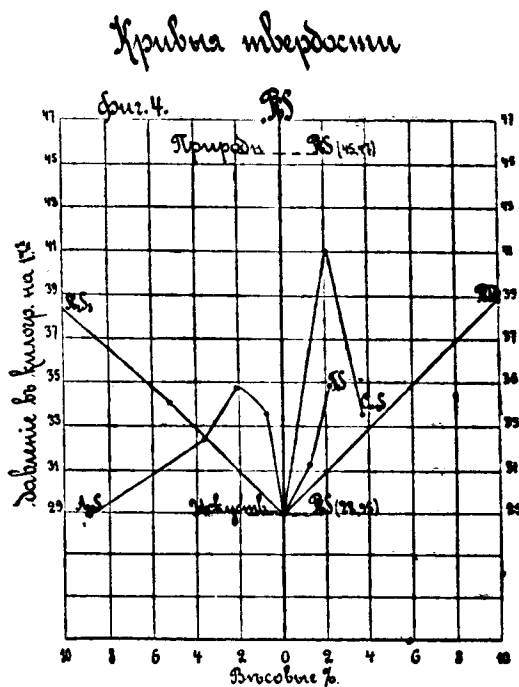
№ IV. Таблица твердости сплавовъ PbS съ FeS, Ag₂S, Cu₂S и Sb₂S₃.

Составъ.		Твердость по Бринелю.	Примѣчаніе.
Вѣсов. %.		Давленіе въ кгр./мм ² .	
PbS	FeS		Нагрузка 50—54 килгр.
100	—	28,95	
98,80	1,20	31,25	
97,85	2,15	34,86	
—	100	159,23	
	Ag ₂ S		
99,32	0,68	33,58	
97,93	2,07	34,74	
96,15	3,85	32,45	
91,10	8,90	28,80	
—	100	18,46	
	Cu ₂ S		
97,93	2,07	41,00	
96,25	3,75	33,46	
—	100	59,16	
	Sb ₂ S ₃		
94,81	5,19	34,05	
88,45	11,55	39,72	
—	100,00	10,48	
PbS			
100	—	45,47	Природный.

На основаніи таблицы твердости № IV вычерчены на табл. V, фиг. 4 сравнительныя кривыя твердости для PbS съ FeS, Ag₂S, Cu₂S, Sb₂S₃ и PbTe, которыя для сплавовъ съ Ag₂SuCu₂S ясно указываютъ на присутствіе твердыхъ растворовъ въ ограничен-

ныхъ концентраціяхъ, что и подтверждаютъ шлифы 13, 14 и 15 (листъ III). За разрѣшеніемъ же вопроса о присутствіи твердыхъ растворовъ въ сплавахъ съ FeS и Sb₂S₃ приходится обращаться къ микроструктурѣ, ибо наблюдаемое увеличеніе твердости могло произойти и въ механической смѣси сплава отъ присутствія второго болѣе твердаго компонента или какого-либо химическаго соединенія.

Табл. V.



Сплавъ съ содержаніемъ 1,20 вѣсов. % FeS совершенно однороденъ, а сплавъ съ 2,15 вѣс. % FeS шлифъ 12 (листъ III), указываетъ уже ясно на присутствіе эвтектики. Такимъ образомъ приходится заключить, что FeS способно образовать твердые растворы въ системѣ PbS + FeS со стороны PbS въ предѣлахъ ниже 2 вѣсов. % FeS. Это вполне согласуется съ выводами К. Фридриха. Сплавъ же съ содержаніемъ 5,19 вѣсов. % Sb₂S₃, шлифъ 16, (листъ III) совершенно не однороденъ. Поэтому нужно полагать, что увеличеніе твердости происходитъ за счетъ одного изъ возможныхъ въ этой системѣ химическихъ соединеній типа $mPbS + nSb_2S_3$, каковымъ, по всей вѣроятности является $2PbS \cdot Sb_2S_3$ (жемсо-нитъ¹⁾, что вполне согласуется съ наслѣдованіями

¹⁾ Hintze. Handbuch der Mineralogie s. 1016.

кривой плавкости А. Д. Дурдина ¹⁾, указывающими на присутствие соединений $2PbS \cdot Sb_2S_3$ и $PbS \cdot Sb_2S_3$ и на отсутствие твердых растворов. Таким образом, приходится заключить, что в области выше 5 в% Sb_2S_3 со стороны PbS больших концентраций твердых растворов не имеется. Вопрос же о том, возможно ли образование твер-

дых растворов в более ограниченных пределах, напр. 1 и 2 в% Sb_2S_3 остается открытым.

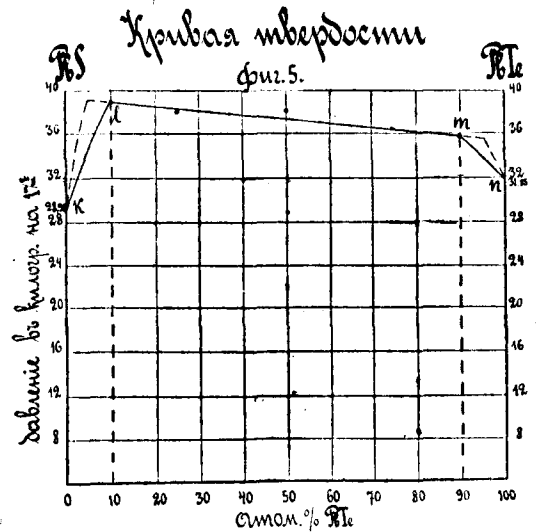
На основании таблицы твердости № VI вычерчена кривая твердости системы $PbS + PbTe$, показанная на табл. VII, фиг. 5.

Она состоит из трех ветвей—двух крайних

№ VI. Таблица твердости сплавов $PbS + PbTe$.

Составъ.		Твердость по Бринелю.	Примѣчаніе.
Атомн. %.			
PbS.	PbTe.		
100	—	28,945	Нагрузка 50—54 клгр.
90	10	38,93	
75	25	37,92	
50	50	38,135	
25	75	36,44	
10	90	35,71	
—	100	31,845	

Табл. VII.



поднимающихся *kl* и *ml* и средней прямой *lm* и указывать на то, что элементы, так называемого, изоморфного ряда группы свинцового блеска не образуют сплошного ряда изоморфных смесей, а лишь в ограниченных пределах с одной и другой стороны составляющих компонентов,

Кривая *kl* соответствует области твердых растворов со стороны PbS , а кривая *ml*—со стороны $PbTe$. Прямая же *lm* указывает область механической смеси насыщенных растворов.

В заключение считаю нужным привести данные твердости природного свинцового блеска, полученного из Музеума Горного Института Императрицы Екатерины II. Шлифы показывали совершенно однородную структуру, а испытания на твердость по способу Бринеля дали 45, 47 клгр./мм², значительно превосходящую твердость искусственного свинцового блеска 28,95 клгр./мм². Эту разницу

твердости, на основании предыдущих исследований, можно объяснить способностью свинцового блеска образовывать твердые растворы с некоторыми из своих примесей. Таким образом можно заключить, что в природном свинцовом блеске часть примесей находится в виде твердых растворов.

Результаты:

1) Определена кривая твердости бинарной системы $Pb + Te$ с образованием химического соединения $PbTe$ (алтантъ), твердость которого (31,85 клгр./мм²) значительно превышает твердость своих компонентов (Pb —3,92 клгр./мм² и Te —18,43 клгр./мм²), причем максимум твердости (33,58 клгр./мм²) отвечает не химическому соединению ($PbTe$), а некоторой концентрации твердого раствора (49,8 ат. % Te).

2) Твердые растворы, в ограниченных пределах—не более 5 ат. % Pb , образуются со стороны

¹⁾ А. Д. Дурдинъ. О диаграммѣ сплавовъ сѣрнистаго свинца и сѣрнистой сурьмы Ж. Р. Х. О. 1911 г. (686).

$PbTe$ въ системѣ $PbTe + Pb$ и отсутствуютъ со стороны $PbTe$ въ системѣ $PbTe + Te$.

3) Доказано существованіе твердыхъ растворовъ со стороны PbS въ предѣлахъ ниже 2 вѣсов. % для системъ $PbS + FeS$, $PbS + Ag_2S$ и $PbS + Cu_2S$.

4) Такъ называемый изоморфный рядъ PbS и $PbTe$ не образуетъ непрерывнаго ряда изоморфныхъ смѣсей, и концентрація твердыхъ растворовъ ими образуемыхъ не превышаетъ 10 ат. % съ той и другой стороны.

5. Увеличеніе твердости природнаго свинцоваго блеска противъ искусственнаго указываетъ на присутствіе примѣсей въ видѣ твердыхъ растворовъ.

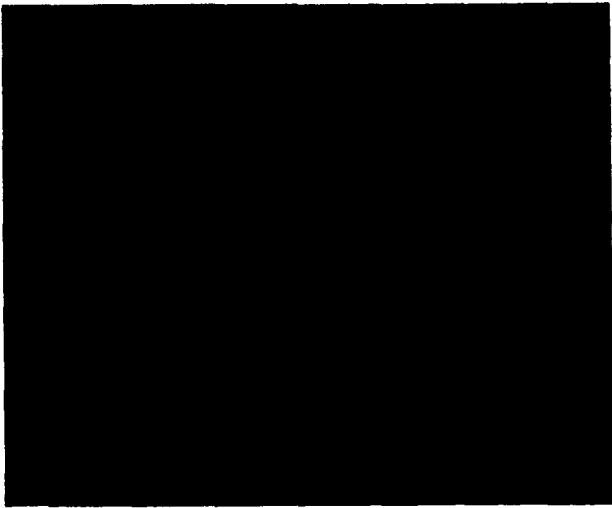
6) Подтверждена чувствительность метода твердости при изслѣдованіи твердыхъ растворовъ въ сплавахъ сѣрнистыхъ и теллуристыхъ соединений.

Настоящая работа исполнена въ Химической Лабораторіи Горнаго Института, подъ непосредственнымъ руководствомъ профессора Н. С. Курнакова, которому за содѣйствіе и постоянные совѣты считаю долгомъ выразить глубокую благодарность.

П. Саидая.

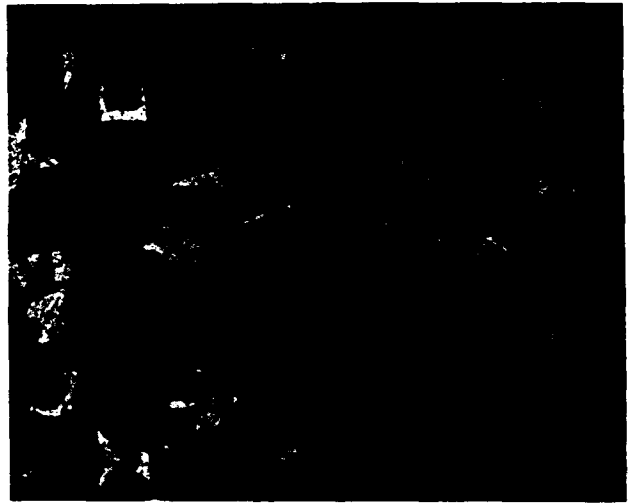


1



0,5 ат. % Te + 99,5 ат. % Pb. ув. 70.

2



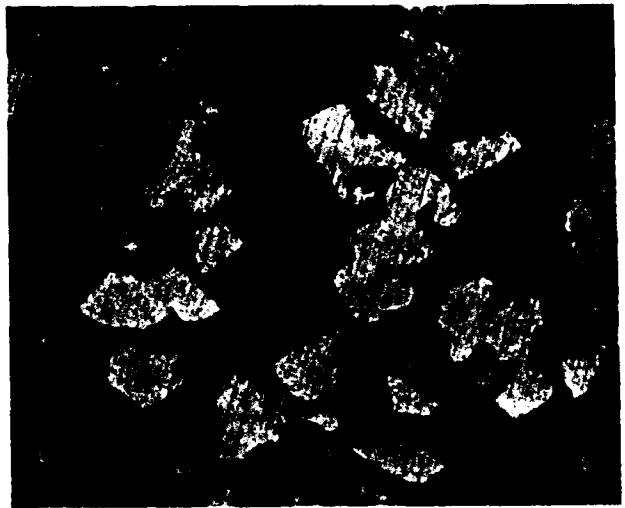
1 ат. % Te + 99 ат. % Pb. ур. 70.

3



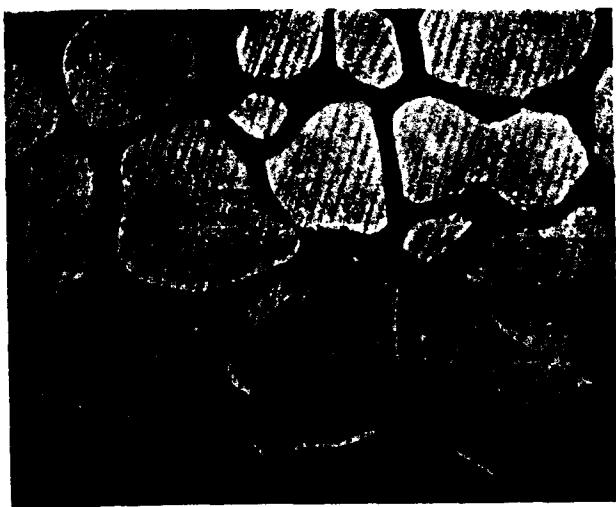
10 ат. % Te + 90 ат. % Pb. ув. 70.

4



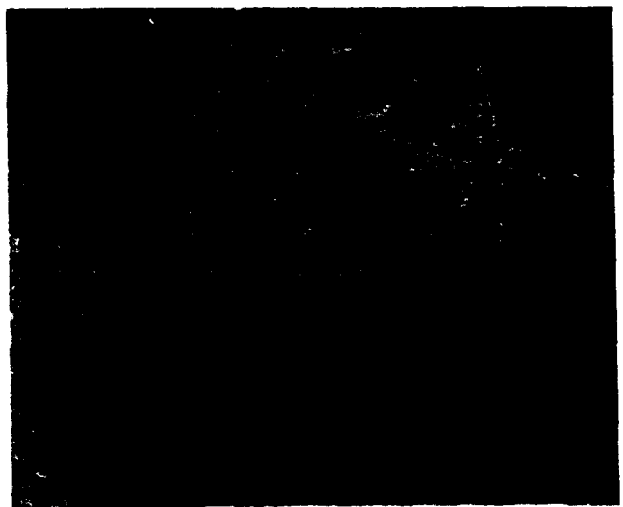
20 ат. % Te + 80 ат. % Pb. ув. 70.

5



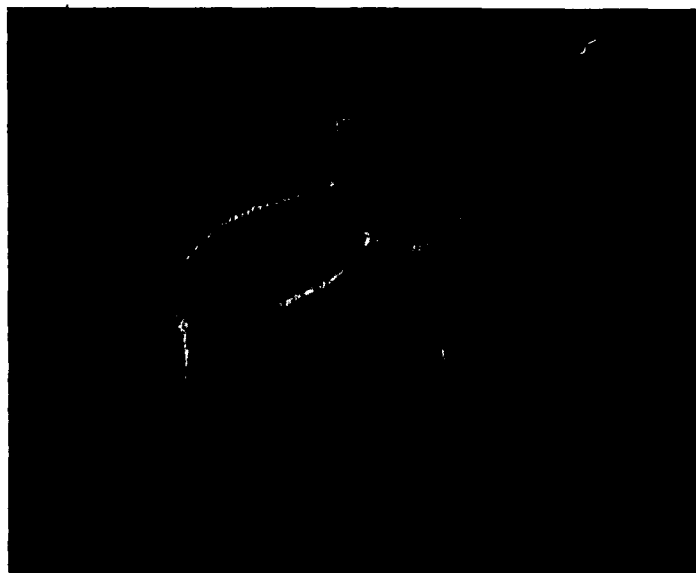
40 ат. % Te + 60 ат. % Pb. ув. 70.

6



49,8 ат. % Te + 50,2 ат. % Pb. ув. 70.

7



50,2 am. % Te + 49,8 am. % Pb.

ув. 70.

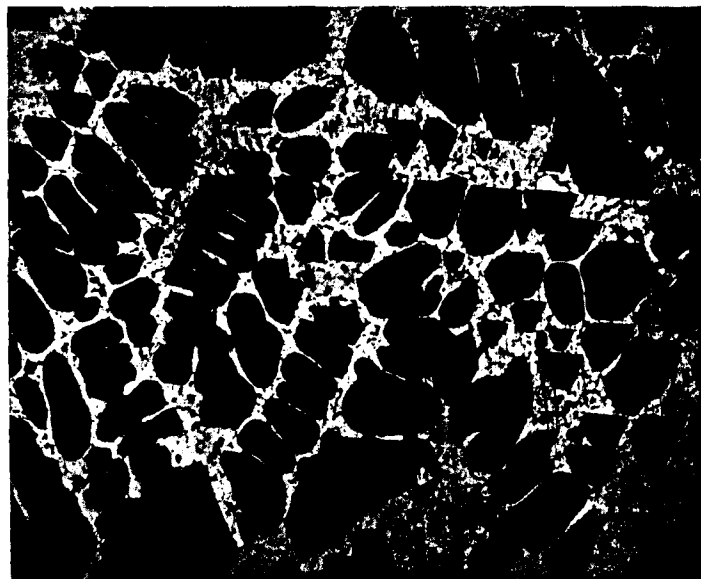
8



55 am. % Te + 45 am. % Pb.

ув. 70.

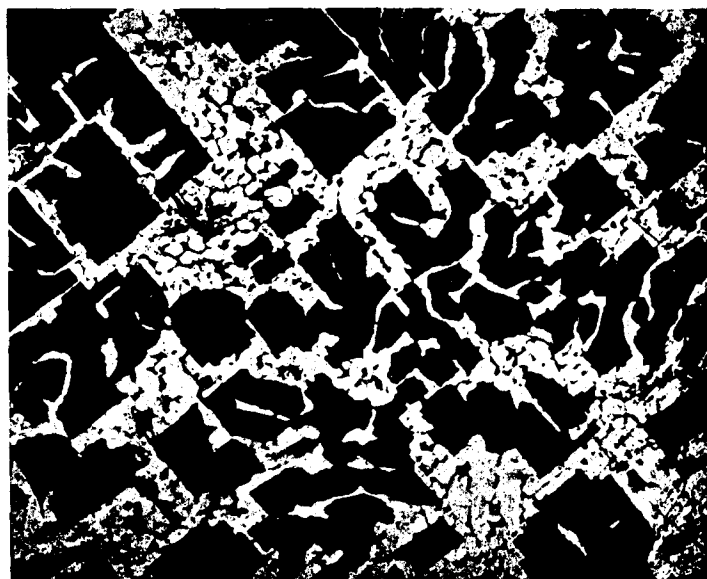
9



60 am. % Te + 40 am. % Pb.

ув. 70.

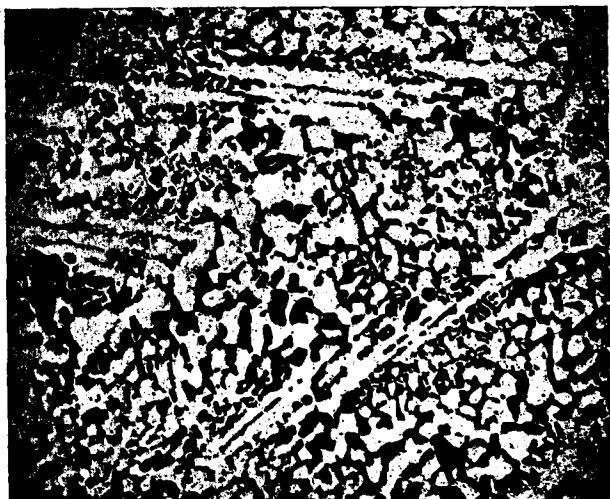
10



70 am. % Te + 30 am. % Pb.

ув. 70.

11



90 ат. % Te + 10 ат. % Pb.

ув. 70.

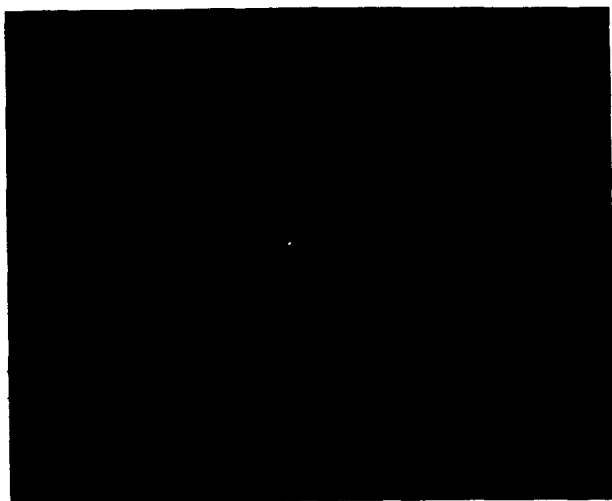
12



2,15 вѣс. % FeS + 97,85 вѣс. % PbS.

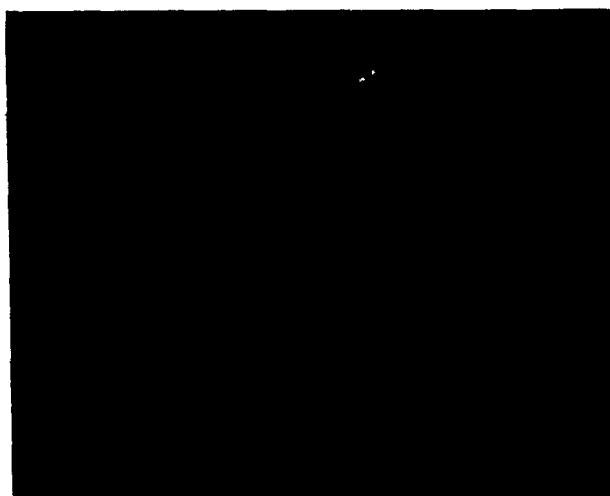
ув. 70.

13

0,68 вѣс. % Ag₂S + 99,32 вѣс. % PbS.

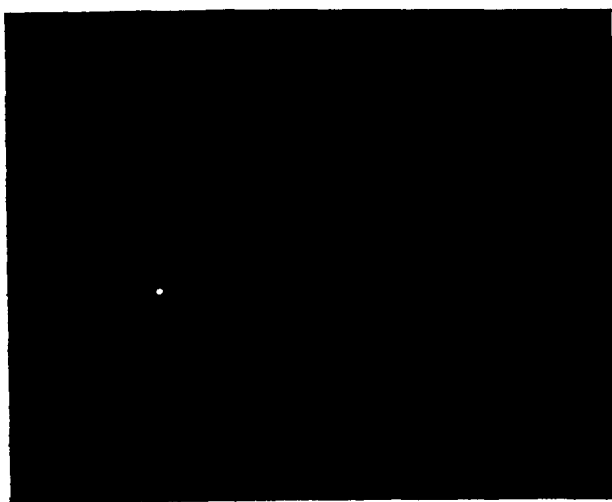
ув. 70.

14

2,07 вѣс. % Ag₂S + 97,93 вѣс. % PbS.

ув. 70.

15

2,07 вѣс. % Cu₂S + 97,93 вѣс. % PbS.

ув. 70.

16

5,19 вѣс. % Sb₂S₃ + 94,81 вѣс. % PbS.

ув. 70.

Краткія сообщенія.

Х. П. П. фонъ-Веймарнъ. Контрактивные векторіальныя энергіи объема и поверхности и тепловое состояніе веществъ ¹⁾.

Въ настоящемъ краткомъ сообщеніи ограничусь приведеніемъ нѣкоторыхъ исходныхъ положеній и главнѣйшихъ выводовъ моей работы:

I. Замѣчательныя свойства твердыхъ веществъ ²⁾ при очень низкихъ температурахъ, установленныя, главнымъ образомъ, работами В. Нернста и Камерлингга Оннеса съ ихъ школами, могутъ быть выведены какъ слѣдствія изъ того учешя о состояніяхъ матеріи, которое я развивалъ въ моихъ работахъ, ³⁾ начиная съ 1907 г.

II. Экспансивные роды энергіи могутъ быть легко сведены ⁴⁾ къ энергіи движенія мельчайшихъ частицъ (молекулъ и атомовъ) веществъ, контрактивные же роды энергіи не могутъ быть сведены, по крайней мѣрѣ теперь, къ энергіи движенія.

Экспансивные и контрактивные роды энергіи такъ сопряжены между собою, что увеличеніе однихъ ведетъ къ уменьшенію другихъ и обратно ⁵⁾:

III. Классическая кинетическо-молекулярная теорія теплоты совершенно не удѣляла должнаго вниманія факторамъ интенсивности контрактивныхъ энергіи объема и поверхности и векторіальности этихъ факторовъ. ⁶⁾ Съ точки зрѣнія классической кинетической теоріи даже факты образованія кристалловъ представляются явленіями весьма мало вѣроятными. ⁷⁾ Представляетъ большое заблужденіе примѣненіе закона распредѣленія скоростей М а к-

¹⁾ Подробнѣе см. мою статью того же заглавія, которая появится въ этомъ журналѣ.

²⁾ Литературу объ этомъ см. Jahrbuch d. Rad. u. Elektr. 8. J. Cl a y. 383 u. f. A. E u s k e n. 489 u. f. (1911) W. N e r n s t. Theoret. Chemie. 7. Auf. (1913) W. W i e n. Sitzungsber. pren. Akad. 184 (1913).

³⁾ П. П. фонъ-Веймарнъ. Koll-Zeitschr. 1—12 (1907—1913) Kolloid-chem. Beihefte 1—4 (1909—1913).

⁴⁾ П. П. фонъ-Веймарнъ. «Основы дисперсоидологической теоріи растворовъ» (стр. 28 и слѣд.) СПб. 1913. Книгоиздательство «Естествоиспытатель».

⁵⁾ См. W o. O s t w a l d. „Grundriss der Kolloidchemie“ II oder III Auflage.

П. П. фонъ-Веймарнъ. „Grundzüge der Dispersoidchemie“ VI—VII.

⁶⁾ По вопросу о векторіальности молекулъ и атомовъ интересно указать на работы Е. С. Федорова. Zeitschr. für Krystallographie 52. 11, 22 (1913).

⁷⁾ W. N e r n s t. l. c. 695.

свелля въ томъ же видѣ какъ онъ выведенъ для газовъ къ твердому векторіальному состоянію. при большихъ значеніяхъ факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергіи. Если принять во вниманіе эти факторы контрактивныхъ векторіальныхъ энергіи, то станетъ очевиднымъ, что обычное представленіе о температурѣ исчезаетъ для различныхъ веществъ при различныхъ температурахъ идеальной термодинамической температурной шкалы и эти температуры сдвигаются какъ отъ внѣшняго давленія такъ и въ зависимости отъ степени дисперсности веществъ.

Теплоемкости твердыхъ кристаллическихъ веществъ возрастаютъ вмѣстѣ со степенью дисперсности и потому напр. представленіе о температурѣ практически исчезающее для грубо-дисперснаго алмаза при 40° Abs. не исчезаетъ при той же температурѣ для высокодисперснаго напр.: суспензионные растворы алмаза въ жидкой дисперсионной средѣ (напр. въ ожигенномъ газѣ). Теплоемкости для одного и того же вещества, находящагося въ различныхъ кристаллическихъ модификаціяхъ, уменьшаются съ возрастаніемъ факторовъ интенсивностей контрактивныхъ векторіальныхъ энергіи: т. е., чѣмъ больше плотность вещества, тѣмъ меньше его теплоемкость ¹⁾.

IV. Для твердыхъ кристаллическихъ веществъ, при такихъ условіяхъ когда факторы интенсивностей очень велики, обычное представленіе о молекулѣ теряетъ свое значеніе ²⁾, ибо тогда всѣ атомы (или молекулы), изъ которыхъ построены кристаллы двигаются согласно, какъ одно цѣлое и теплота въ эгомъ случаѣ должна распредѣляться подобно тому какъ и для одноатомныхъ газовъ и кристаллы является какъ бы атомомъ колоссальныхъ размѣровъ. И съ этой точки зрѣнія понятна также ничтожно малая теплоемкость кристалловъ съ максимальными значеніями факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергіи.

V. При разсмотрѣніи теплового состоянія кристалла надо принимать во вниманія помимо внѣшней поверхности, отдѣляющей его отъ окружающаго пространства, еще

¹⁾ Здѣсь не разсматриваются возможныя кажущіяся исключенія. Экспериментальныя данныя о теплоемкостяхъ см. Landolt, Börnstein, Roth. Physikalisch-chemische Tabellen. 4 Aufl. (1912).

²⁾ W. N e r n s t. l. c. 298—299.

П. П. фонъ-Веймарнъ Koll-Zeitschr. 4. 201 (1909)

внутреннюю динамическую (пульсирующую) поверхность, возникающую по причинѣ нарушения ориентированности, вызываемого ударами молекул газообразной или жидкой средь, въ которыхъ находится кристаллъ и тепловымъ неоднородностямъ этихъ средь. Отъ развитія этой поверхности въ сильной степени зависитъ теплоемкость вещества; эта динамическая поверхность имѣетъ наименьшее развитіе при большихъ значеніяхъ факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергій и, при постоянныхъ температурѣ и давленіи, неодинакова для различныхъ веществъ; съ пониженіемъ температуры, вслѣдствіе возрастанія значенія факторовъ интенсивной контрактивныхъ энергій, динамическая (пульсирующая) поверхность уменьшается и вмѣстѣ съ нею уменьшается и теплоемкость. Предѣльное состояніе кристалла, когда эта динамическая поверхность равна нулю, слѣдуетъ назвать абсолютно статическимъ свободнымъ максимальнымъ ориентированнымъ векторіальнымъ состояніемъ¹⁾.

При разсмотрѣннн теплого состоянія куска твердаго вещества (напр. куска золота) необходимо, слѣдовательно, принимать во вниманіе три поверхности:

1. Внѣшнюю поверхность, ограничивающую кусокъ твердаго вещества отъ окружающаго пространства.
2. Внутреннюю поверхность соприкосновенія кристаллическихъ зеренъ составляющихъ кусокъ.
3. Суммарную, внутреннюю динамическую (пульсирующую) поверхность кристаллическихъ зеренъ.

Признаніе, обладающихъ большей теплоемкостью, твердыхъ «аморфныхъ» (по моей номенклатурѣ: затормаженныхъ минимально ориентированныхъ состояній) состояній за болѣе устойчивыя, чѣмъ кристаллическія (свободныя ориентированныя состоянія) есть большое заблужденіе, столь же большое какъ утвержденіе, что тончайшая золотая фольга болѣе устойчива, чѣмъ соответствующій ей по вѣсу кристаллъ золота. Кинетическія доказательства устойчивости «аморфныхъ» состояній совершенно неправильны, ибо они не оцѣниваютъ значеній факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергій²⁾.

VI. На кривой плавленія (жидкость + твердое) при очень большихъ давленіяхъ и высокыхъ температурахъ, должно происходить значительное развитіе внутреннихъ поверхностей (V) и измѣненіе теплоемкостей въ томъ смыслѣ, что критическая точка (жидкость + дисперсно-кристаллическое) должна существовать³⁾.

VII. Теплопроводность твердаго вещества, какъ и скорость звука, возрастаетъ съ увеличеніемъ значеній факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергій.

VIII. Всѣ процессы нашего міра направлены такъ, что

¹⁾ О предложенной мной систематикѣ см. Журн. Р. Х. О. 43. 1477 (1911). Kolloidchem. Beihefte. 4. 65 (1912). Къ этой систематикѣ для элементарныхъ веществъ можно еще прибавить (O. Lehmann. Physik. Zeitschr. 9. 251 (1908). W. Nernst. ibid. 13. 1064 (1912) абсолютно динамическое состояніе, какъ состояніе предѣльное.

²⁾ W. Nernst. l. c. 95—96. 695. Ср. П. П. фонъ Веймарнъ. «Grundzüge der Dispersoidchemie» Verlag v. T. Steinkopff. Dresden 1911. Такое представленіе противорѣчитъ и моимъ опытамъ надъ кристаллизациями при температурѣ кипѣнія жидкаго воздуха.

³⁾ П. П. фонъ Веймарнъ. Koll. Zeitschr. 6. 309 (1910) Kolloidchem. Beihefte. 4. 81 (1912).

всѣ вещества стремятся въ концѣ концовъ перейти въ абсолютное статическое векторіальное состояніе матеріи, характеризующееся максимальными значеніями факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергій. Принявъ во вниманіе отдѣлъ II должно указать, что абсолютное сопротивление на разрывъ (равнымъ образомъ и твердость) практически однородныхъ кристалловъ, при цѣлесообразномъ примѣненіи, можетъ служить мѣриломъ какъ свободныхъ, такъ и связанныхъ энергій.

Чѣмъ больше упомянутое сопротивление вещества, тѣмъ меньше шансовъ ожидать у этого вещества естественнаго т. е. самопроизвольнаго, идущаго безъ затраты работы, процесса.

Весьма существенно отмѣтить, что затрачивая работу на измеленія равныхъ объемовъ двухъ различныхъ кристаллическихъ модификацій, обладающихъ различными значеніями факторовъ интенсивности контрактивныхъ энергій, мы можемъ заставить идти естественный для грубо-дисперснаго состоянія процессъ въ обратномъ направленіи при достаточно высокой степени дисперсности, ибо для измеленія до той же степени дисперсности, для модификаціи съ большими значеніями факторовъ интенсивностей контрактивныхъ энергій намъ приходится затрачивать больше работы¹⁾.

IX. Большая теплоемкость (V) высоко-дисперсныхъ состояній вещества по сравненію съ его грубо-дисперснымъ состояніемъ приводитъ къ заключенію, что, при постоянной температурѣ измѣряемой обыкновеннымъ термометромъ, внутренняя температура²⁾ дисперснаго вещества тѣмъ выше, чѣмъ больше степень его дисперсности. Отсюда сразу понятно, что какъ измѣненія всѣхъ свойствъ высоко-дисперснаго вещества такъ и его превращенія происходятъ въ томъ же смыслѣ и направленіи, какъ и для грубо-дисперснаго вещества при болѣе или менѣе сильномъ повышеніи его обыкновенной температуры. Иначе говоря, высоко-дисперсное вещество, по сравненію съ грубо-дисперснымъ, находится, по отношенію къ части теплого запаса называемой внутренней энергій, въ тепловомъ состояніи, отвѣчающемъ высшей температурѣ и тѣмъ болѣе высшей, чѣмъ выше степень дисперсности.

X. Въ заключеніе важно добавить, что указанная въ отдѣлѣ V внутренняя поверхность должны приниматься во вниманіе не только при разсмотрѣннн теплого состоянія, но и при разсмотрѣннн любыхъ состояній веществъ³⁾.

Весьма важное значеніе эти внутреннія поверхности имѣютъ для яснаго пониманія механическихъ свойствъ твердыхъ системъ (сопротивленіе разрыву, твердости и проч.) и теорія сопротивленія матеріаловъ принимающая во вниманіе эти поверхности является, по моему убѣжденію, единственной рациональной и плодотворной теоріей⁴⁾.

4 Апрель 1913 г.

¹⁾ П. П. фонъ Веймарнъ. Ueber ein Grundgesetz der Dispersoidologie. Koll-Zeitschr. 12. 125 (1913).

²⁾ Эта температура, служащая мѣриломъ внутренней энергій, не можетъ быть, конечно, замѣрена обыкновеннымъ термометромъ.

³⁾ На значеніе этихъ поверхностей, какъ для агрегатныхъ, такъ и для электрическихъ (электропроводность и т. п.) состояній веществъ мною было указано въ моихъ прежнихъ статьяхъ.

⁴⁾ Статья, посвященная этой теоріи подготавливается мною къ печати.

XI. Е. С. Федоровъ. Простой и быстрый способ демонстраціи общаго закона кристаллизаціи.

Общій законъ, о которомъ идетъ здѣсь рѣчь, состоитъ въ томъ, что кристаллъ, выпадающій изъ раствора, стремится принять наименьшую поверхность.

Этотъ, имѣющій простую и общеизвѣстную теоретическую основу, законъ, обыкновенно демонстрируется примѣрами кристаллизаціи, или вѣрнѣе перекристаллизаціи, требующей продолжительнаго времени, даже мѣсяцевъ, или по крайнѣй мѣрѣ сутокъ. Я нѣткнулся на препаратъ, на которомъ это демонстрированіе можетъ продолжаться нѣсколько секундъ; этотъ препаратъ есть натровая селитра, микроскопическіе кристаллики которой растворяются отъ дыханія въ нѣсколько секундъ и приближительно въ такое же время выкристаллизовываются вслѣдствіе испаренія. Благодаря этой быстротѣ конечно такъ же быстро демонстрируется и упомянутый законъ.

Эту демонстрацію можно произвести слѣдующимъ образомъ.

Помѣстимъ на чистой стеклянной пластинкѣ возможно расплывшуюся каплю слабого воднаго раствора этой соли и дадимъ ей возможно быстро кристаллизоваться, для чего полезно пластинку наклонить.

Очень скоро съ верхняго конца расплывшейся капли образуется пленка, быстро нарастающихъ и высыхающихъ кристалловъ, отчасти въ видѣ отдѣльныхъ пылевидныхъ ромбоэдровъ (большею частью въ пирамидальными углубленіями), отчасти въ видѣ ихъ цѣпей или такъ называемыхъ фигуръ роста.

Толщина быстрѣе всего образующагося скелета такъ незначительна, что, несмотря на громадную величину двупреломленія, видны очень низкіе поляризаціонные цвѣта.

Именно при этихъ условіяхъ самопроизвольно образуются кристаллическіе индивиды съ относительно громадною поверхностью исключительно потому, что поставлены всѣ условія, препятствующія индивидамъ принять наименьшую поверхность.

Исходя изъ этихъ пленокъ и производя повторную кристаллизацію упомянутымъ выше способомъ то есть давая индивидамъ больше свободы проявлять стремленіе принять наименьшую поверхность, мы заставляемъ пленку распадаться на отдѣльные кристаллики, получающіе нормальную форму ромбоэдровъ, затративъ на это нѣсколько секундъ. Многое здѣсь зависитъ отъ того, насколько мы надышемъ то есть сколько вокругъ cadaго введемъ ра-

створяющей жидкости; сохраняя часть кристалликовъ отъ полного растворенія, мы вмѣстѣ съ тѣмъ сохраняемъ ихъ какъ индивиды, и постепенное ихъ утолщеніе даетъ себя знать въ повышеніи поляризаціонныхъ цвѣтовъ.

Если же мы надышемъ настолько сильно, что вмѣсто кристалликовъ получатся капли разбавленнаго раствора, то можемъ вызвать и обратный процессъ то есть распадѣніе болѣе крупнаго кристалла на совокупность болѣе мелкихъ.

Если ту же операцію мы будемъ производить на чистой поверхности ромбоэдра кальцита, то, какъ извѣстно, всѣ образующіеся ромбоэдры натровой селитры расположатся параллельно ромбоэдру кальцита, служащему основаніемъ для кристаллизаціи.

Въ общемъ случаѣ, превращая всѣ такіе кристаллики въ капли жидкости мы снова получимъ изъ каждой капли вновь образовавшіеся, параллельно ориентированные, ромбоэдры. Однако, при многократномъ повтореніи опыта не можемъ не замѣтить появленіе и постепенное увеличеніе ромбоэдровъ, не имѣющихъ одинаковой ориентировки съ основаніемъ.

Если возьмемъ кристаллъ кальцита съ искусственно вызванною въ немъ сдвинутою частью, образующею съ нею какъ бы двойникъ, то и сдвинутая часть относится къ осаждающимся на ней ромбоэдрамъ натровой селитры такъ же, какъ нормальный ромбоэдръ кальцита.

Такъ какъ сдвигъ въ сущности никогда не бываетъ вполне равномернымъ, а обыкновенно состоитъ изъ большаго числа частью сдвинутыхъ, частью сохранившихъ параллельное положеніе (какъ бы полисингетическихъ двойниковыхъ) пластинокъ, причемъ двѣ плоскости ромбоэдра какъ въ сдвинутой, такъ и въ несдвинутой части сохраняются неизмѣнными, то они именно пересѣкаются густымъ рядомъ упомянутыхъ пластинокъ. Кристаллизуя на нихъ ромбоэдры натровой селитры, мы конечно на пластинкахъ разнаго рода получимъ и ромбоэдры въ двухъ различныхъ ориентировкахъ, по которымъ легко отличимъ пластинки, претерпѣвшія сдвигъ, отъ пластинокъ, сохранившихъ первоначальную ориентировку.

Конечно, такіе же опыты растворенія и кристаллизаціи можно производить и съ многочисленными другими солями.

13 апрѣля 1913 г.

Содержаніе вышедшихъ въ 1912 году выпусковъ **Горнаго Журнала** *).

За январь и февраль: 1. О скорости прохождения штрековъ; Горн. Инст. Н. И. Трушкова. 2. Платина и платиновыя мѣсторожденія на Уралѣ; проф. Л. Дюпарка. 3. Описание двигателей внутренняго сгорания на нѣкоторыхъ заводахъ Урала; горн. инж. Г. А. Лузина. 4. Очерки системъ разработокъ металлическихъ рудниковъ въ Америкѣ и англійскихъ колоніяхъ; Горн. инж. И. М. Субботина; 5. Случай спасенія нѣсколькихъ рабочихъ послѣ взрыва газа, исключительно благодаря наличности на рудникахъ респираторовъ и спасательной команды; проф. А. А. Скочинскаго. 6. Анализъ летучихъ веществъ угля; Горн. Инст. Л. Эберцина. 7. Работы Лабораторіи Министерства Торговли и Промышленности за періодъ времени 1906—1911 годъ включительно; Горн. инж. Ф. Ю. Жерве. 8. Постановка преподаванія геодезіи и маркшейдерскаго искусства въ нѣкоторыхъ заграничныхъ высшихъ горныхъ школахъ; Горн. инж. Л. Ф. Брусницына. 9. Поверхностное сжиганіе смѣси газа и воздуха безъ пламени; проф. В. Бона. 10. Александръ Ивановичъ Афонасьевъ. (Некрологъ); сост. Г. А. Лузинъ. 11. М. Г. Евангуловъ. Технологія посталловъ. Литейное дѣло. СІБ. 1912 г.; Инж. техн. Л. И. Какурина. 12. Къ критической замѣткѣ г. Какурина; проф. В. Н. Липина.

За мартъ: 1. Очерки системъ разработокъ металлическихъ рудниковъ въ Америкѣ и англійскихъ колошіяхъ; Горн. инж. И. М. Субботина. 2. Платина и платиновыя мѣсторожденія на Уралѣ; проф. Л. Дюпарка — переводъ г-жи Тихоновичъ. 3. Описание двигателей внутренняго сгорания на нѣкоторыхъ заводахъ Урала; Горн. инж. Г. А. Лузина. 4. Продолженіе статьи Горн. инж. Ф. Ю. Жерве. 5. Постановка преподаванія геодезіи и маркшейдерскаго искусства въ нѣкоторыхъ заграничныхъ высшихъ горныхъ школахъ; Горн. инж. Л. Ф. Брусницына. 6. Замѣтка по вопросу объ осѣданіи земной поверхности въ зависимости отъ подземныхъ разработокъ. 7. Б. И. Бокій. Практическій курсъ горнаго искусства. Часть вторая. Проф. М. М. Протодьяконова.



*) Предшествующее объявленіе о содержаніи выпусковъ журнала помѣщено въ томѣ IV, вып. II „Зап. Горн. Ин-та“.

НОВАЯ ЦЕНА
Р. 1-120

Объ изданіи

ЗАПИСОКЪ ГОРНАГО ИНСТИТУТА

Императрицы Екатерины II.

Выпуски имѣютъ появляться неперіодически, а по мѣрѣ накопленія матеріала въ размѣрѣ окопо 10 печатныхъ листовъ.

Лица и учрежденія, желающія выписывать этотъ журналъ и другія изданія Института, дѣлаютъ о томъ заявленія дѣлопроизводителю по изданію журнала. Выпуски, которыхъ въ каждомъ томѣ пять, могутъ быть высылаемы наложеннымъ платежемъ.

ВЫШЛИ ИЗЪ ПЕЧАТИ И ПРОДАЮТСЯ ВЪ ИНСТИТУТѢ:

тома I-го выпускъ	1	цѣна	1 р. 30 к.
" "	2	"	1 р. 80 к.
" "	3	"	1 р. 80 к.
" "	4	"	2 р. 25 к.
" "	5	"	1 р. 50 к.
тома II-го выпускъ	1*)	цѣна	1 р. 45 к.
" "	2**)	"	1 р. 25 к.
" "	3	"	1 р. 70 к.
" "	4	"	1 р. 50 к.
" "	5	"	1 р. 50 к.
тома III-го выпускъ	1	цѣна	2 р. — к.
" "	2	"	1 р. 50 к.
" "	3 и 4	"	2 р. 80 к.
" "	5	"	1 р. 65 к.
тома IV-го выпускъ	1	цѣна	2 р. 50 к.
" "	2	"	1 р. 80 к.

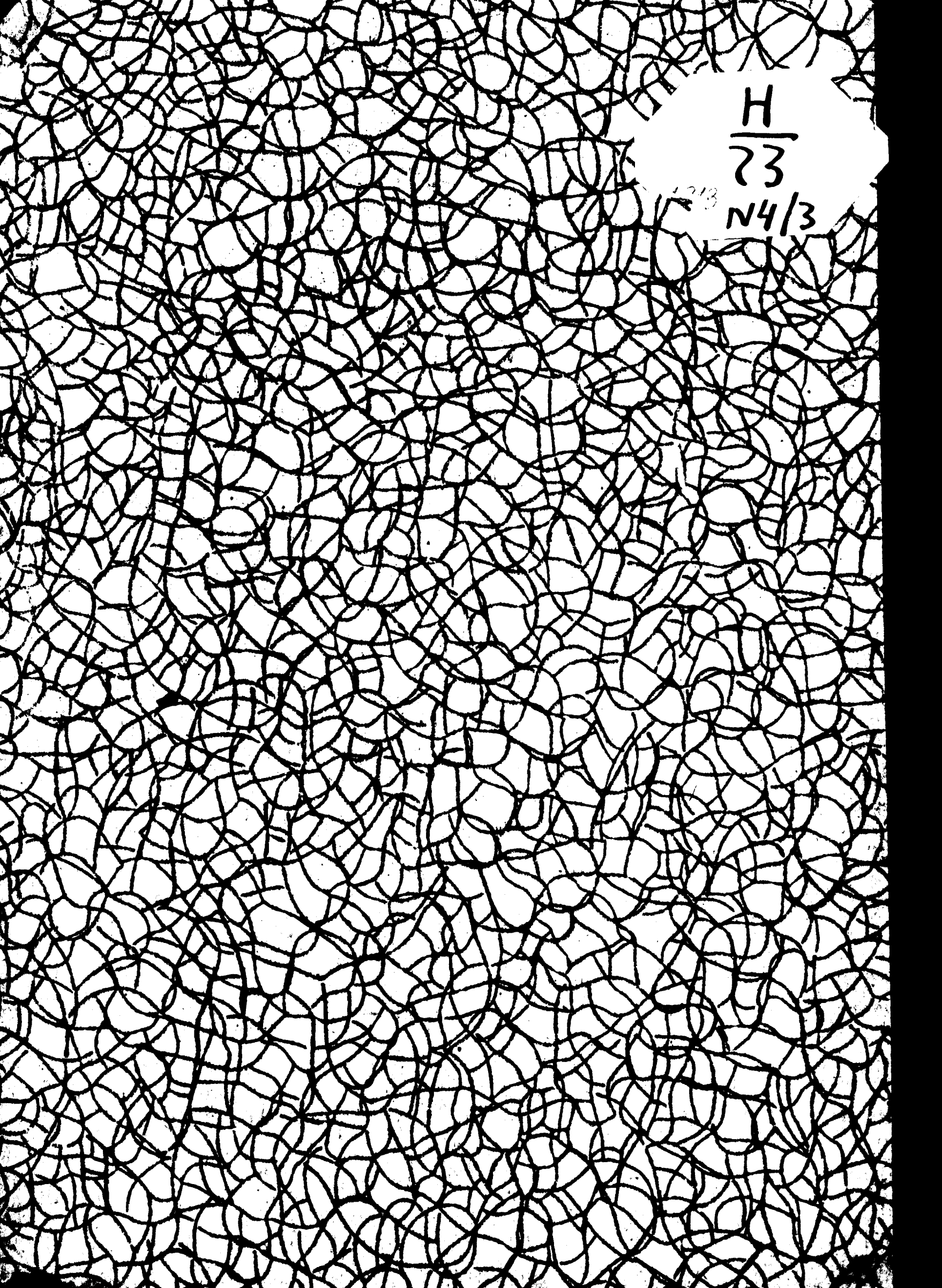
Кромѣ того продаются въ Институтѣ слѣдующія изданія:

- Е. С. Федоровъ.** Новая геометрія какъ основа черченія. 1907 г. Цѣна 3 руб.
- В. И. Богдановичъ.** Курсъ рудныхъ мѣсторожденій. 1912 г. Цѣна: I тома—7 руб., II тома—6 руб.
- А. Э. Купфферъ.** Каталогъ минералогической коллекціи Музеума Горнаго Института. 1912 г. Цѣна 5 руб.
- С. Верисонъ.** Освѣщеніе рудниковъ. Цѣна 1 р. 50 к.
- П. П. фонъ-Веймарнъ.** Къ ученію о состояніяхъ матеріи. 1910 г. Цѣна 3 р.

*) Между прочимъ помѣщенъ указатель законовъ, относящихся къ поискамъ, развѣдкамъ и пріобрѣтенію права на разработку мѣсторожденій полезныхъ ископаемыхъ.

***) Посвященъ 50-лѣтію ученой и научно-технической дѣятельности Проф. И. А. Тиме.





H
23

N4/3